

UNA NOTA METODOLÓGICA ACERCA DE APLICACIONES DEL FILTRO DE KALMAN A LAS CALIBRACIONES EN MODELOS DE CICLO REAL

JESÚS RUIZ

Universidad Complutense de Madrid

Este trabajo tiene dos objetivos. El primero de ellos es aportar una generalización del filtro de Kalman a la estimación de modelos dinámicos con expectativas racionales formadas en el presente de variables endógenas futuras. El segundo es mostrar dos aplicaciones de este procedimiento en modelos estocásticos de crecimiento bajo el supuesto de expectativas racionales. En particular, se presenta, por un lado, una metodología para calibrar parámetros de estos modelos que resultan difíciles de estimar debido a la ausencia de datos en la economía real (por ejemplo, el coeficiente de aversión relativa al riesgo). El procedimiento que se presenta tiene la ventaja de la sencillez de su funcionamiento. Por otro lado, se utiliza el procedimiento de calibración para dar una medida objetiva de discriminación entre modelos, que permita resolver el problema de identificación de modelos observacionalmente equivalentes.

Palabras clave: Filtro de Kalman, calibración, modelos de ciclo real, expectativas racionales, sistemas dinámicos.

(JEL C61, E32, C51, C52)

1. Introducción

Este trabajo tiene dos objetivos. El primero es aportar una generalización del filtro de Kalman a modelos dinámicos lineales con expectativas racionales, formadas en el presente, de variables endógenas futuras.

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo que estima el estado no observable de un sistema dinámico (con expectativas racionales en este caso) dado un conjunto de observaciones que proporcionan información acerca de dicho estado en cada instante. En Bertsekas (1976) se

Agradezco al profesor Alfonso Novales así como a dos evaluadores anónimos sus valiosos comentarios y sugerencias y al profesor Emilio Cerdá su ayuda en la comprensión de la metodología de estimación del filtro de Kalman. Agradezco el apoyo financiero proporcionado por la DGICYT a través del proyecto PB98-0831.

desarrolla el algoritmo que estima por mínimos cuadrados lineales el vector de variables endógenas no observables (que evolucionan según un sistema dinámico de primer orden), dado un vector de variables observables, que son combinaciones lineales de las primeras, más un vector de error de observación. En Cerdá (1992) se generaliza el filtro de Kalman a modelos con expectativas racionales, formadas en el pasado, de variables presentes y futuras. Aunque existen bastantes trabajos dedicados a resolver modelos lineales con expectativas futuras formadas en el pasado (Aoki y Canzoneri, 1979 y Burmeister y Wall, 1982, por ejemplo), en otros trabajos, las variables endógenas dependen de su pasado y de las previsiones que se hacen en el presente sobre el futuro de las mismas (Blanchard y Kahn, 1980, Gourieroux, Laffont y Monfort, 1982 y Sims, 1999). Así, tiene interés desarrollar una generalización del filtro de Kalman a este tipo de modelos. Además, los modelos estocásticos de crecimiento no lineales utilizados en la literatura de ciclos reales y bajo el supuesto de expectativas racionales, pueden ser aproximados (dada su no linealidad) por modelos dinámicos lineales con expectativas racionales del tipo mencionado (en estos modelos el vector de variables endógenas será el estado no observable), por lo que una amplia gama de modelos teóricos puede ser objeto de estudio desde un punto de vista metodológico como el que aquí se presenta.

El segundo objetivo es mostrar dos aplicaciones de este procedimiento de estimación para el análisis de modelos estocásticos de crecimiento bajo el supuesto de expectativas racionales. En la primera aplicación, se presenta, una metodología para estimar parámetros que resultan difíciles de calibrar debido a la ausencia de datos en la economía real y que son, sin embargo, determinantes básicos de las implicaciones del modelo teórico (el coeficiente de aversión relativa al riesgo, parámetros asociados a funciones de producción de nuevo capital humano, etc).

El procedimiento que proponemos es el siguiente: bajo la hipótesis de que el modelo teórico (un modelo particular de crecimiento estocástico con expectativas racionales) es el generador de las series temporales históricas de una economía real particular, se estiman los valores numéricos de un subconjunto de parámetros del modelo de modo que las sendas estocásticas generadas por el modelo teórico se ajustan bien a las observadas.

La generación de series temporales por el modelo teórico se realiza utilizando el filtro de Kalman. Este procedimiento proporciona una

estimación de sendas temporales no observadas (las del modelo teórico) que son función, por un lado, de las observaciones de las variables de la economía real y, por otro lado, de los parámetros del modelo teórico, por lo que es natural poner en marcha un procedimiento de búsqueda de los valores paramétricos que mejor ajusten las series temporales estimadas a las observadas.

Además, en esta metodología se aúnan las etapas de calibración y verificación, ya que el procedimiento de búsqueda de parámetros genera objetivamente una medida del grado en que el modelo ajusta el proceso estocástico de los datos de series históricas observadas. Con esta propuesta, podemos incluso inferir qué parte del modelo es responsable de un peor ajuste entre los datos observados y estimados, dado que disponemos de una función de pérdida en la que utilizamos toda la información disponible. Esto contrasta con una práctica habitual en la literatura de ciclos reales que seleccionan los valores de los parámetros a partir de las predicciones del modelo a través de medias a largo plazo, excluyendo otras características de los datos. Además, en dicha práctica, el uso de las volatilidades y correlaciones entre variables se dirige a la contrastación de modelos, pero no como una fuente de información sobre los valores paramétricos. Esto lleva consigo el poco énfasis que suele hacerse sobre la calidad de la calibración resultante. El procedimiento que proponemos formaliza la calibración y la verificación utilizando funciones de pérdida, por lo que la elección de unos modelos frente a otros puede ser fácilmente justificada.

Existen otros trabajos que desarrollan metodologías alternativas a ésta y que tienen las propiedades deseables de verificación estadística de los parámetros calibrados (Watson, 1993, Ingram y Lee, 1991 y Christiano y Vigfusson, 1999, entre otros). En la línea del procedimiento que proponemos, McGrattan (1996) utiliza también el filtro de Kalman y una búsqueda óptima de parámetros por máxima verosimilitud. La diferencia fundamental estriba en que la utilización del filtro de Kalman para estimar series temporales generadas por el modelo teórico a partir de las series observadas se realiza aproximando linealmente el modelo teórico. En nuestro trabajo, el modelo se aproxima log-linealmente por lo que podemos estimar variables con expectativas (de enorme interés en la literatura de ciclos reales¹), ya que, dada esta aproximación, no

¹Aunque este aspecto no es analizado en el trabajo, la generación de series temporales para las expectativas permitiría diseñar contrastes de racionalidad de la solución.

es posible aplicar el principio de equivalencia cierta.

En lo que se refiere a la segunda aplicación de esta metodología, se utiliza el procedimiento de calibración para dar una medida objetiva de discriminación de modelos. Es bien conocido que el uso limitado de la información disponible en los experimentos computacionales tiene el peligro de hacer que una amplia gama de modelos económicos con muy diferentes implicaciones sobre bienestar sean compatibles con la evidencia empírica, es decir, sean modelos observacionalmente equivalentes. Al disponer de una función de pérdida que muestra por separado el error de ajuste procedente de cada variable del modelo, el investigador puede penalizar de modo diferente cada una de ellas, lo que puede resolver el problema de ausencia de identificación del modelo teórico.

El trabajo se organiza como sigue: en la sección 2 se generaliza el filtro de Kalman al caso en que el modelo se especifica con expectativas formadas en el presente de variables futuras. En la sección 3 se presentan dos aplicaciones de esta generalización: a la calibración de parámetros que ajustan las variables teóricas de los modelos de ciclo real con las variables observadas y a la discriminación de modelos. Por último, en la sección 4 se concluye.

2. Una generalización del filtro de Kalman a modelos con expectativas formadas en el presente de variables futuras

En esta sección se muestra la generalización del filtro de Kalman y se presenta el algoritmo de estimación de un vector y_t de variables en cuya determinación influyen las expectativas que de ellas se formulan en $t - 1$ y de las que se sólo se observa una señal con ruido.

A continuación describimos el problema siguiendo una notación similar a Cerdá (1992): suponemos que y_t es un vector $n \times 1$ de variables endógenas no observables cuya evolución dinámica viene dada por el siguiente sistema:

$$y_t = G_t y_{t-1} + F_t y_{t+1|t}^* + \Xi_t d_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad [1]$$

y el sistema de observación es:

$$z_t = M_t y_t + w_t, \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad [2]$$

donde: d_t es un vector $n \times 1$ de variables exógenas aleatorias, que

responden al proceso estocástico:

$$d_t = \sum_{i=1}^p R_i d_{t-i} + \xi_t, \quad [3]$$

y donde ξ_t es ruido blanco; ε_t es el vector $n \times 1$ de ruidos del sistema; z_t es un vector $p \times 1$ de variables observables estacionarias; e $y_{t+1|t}^*$ es la expectativa de y_{t+1} condicionada al conjunto de información del periodo t . Este conjunto es: $I_t = \{z_t, z_{t-1}, \dots, z_0, d_t, d_{t-1}, \dots, d_1\}$; w_t es el vector $p \times 1$ de error de observación; $G_t, F_t, \Xi_t, R_i, i = 1, \dots, p$ son matrices deterministas $n \times n$ y M_t es una matriz $p \times n$. Todas ellas son conocidas para $t = 1, 2, \dots, T$ e $i = 1, \dots, p$; $y_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T, w_0, \dots, w_T, \xi_0, \dots, \xi_T$ son vectores aleatorios gaussianos, mutuamente incorrelacionados, cuyos primeros y segundos momentos son:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_t &= Ew_t = E\xi_t = 0; E\varepsilon_t \varepsilon_t' = \Lambda_t; Ew_t w_t' = W_t; & [4] \\ E\xi_t \xi_t' &= L_t, t = 1, \dots, T; Ey_0 = m_0; E[(y_0 - m_0)(y_0 - m_0)'] = S_0; \end{aligned}$$

todos conocidos para cada t .

La solución al problema de estimación mínimo cuadrática del vector y_t con I_t como conjunto de información, se basa en una transformación del sistema [1] en una forma equivalente, de modo que puedan aplicarse los resultados que para el filtro de Kalman se obtienen siguiendo la metodología dada por Bertsekas (1976) y generalizada por Cerdá (1992).

PROPOSICIÓN 1: *Supongamos que se verifican las condiciones del problema descrito anteriormente y que $z_t = v_t + \Phi_1 v_{t-1} + \dots = \Phi(B)v_t$ siendo B el operador de retardo y v_t vector de ruido blanco² es la representación de medias móviles del vector z_t de variables observables. Entonces el sistema [1] puede expresarse como sigue:*

$$y_t = A_t y_{t-1} + B_t y_{t|t-1}^* + B_{1t} y_{t+1|t-1}^* + b_t + u_t, t = 1, 2, \dots, T \quad [5]$$

donde $A_t = (I - F_t P_t)^{-1} G_t$, $B_t = (I - F_t P_t)^{-1} F_t P_t$, $B_{1t} = (I - F_t P_t)^{-1} F_t$, $b_t = (I - F_t P_t)^{-1} \Xi_t d_t$, $u_t = (I - F_t P_t)^{-1} \varepsilon_t$, con matriz de covarianzas $U_t = E[u_t u_t'] = (I - F_t P_t)^{-1} \Lambda_t ((I - F_t P_t)^{-1})'$, $P_t = (M_t' M_t)^{-1} M_t' \Phi_1 M_{t-1} (M_{t-1}' M_{t-1})^{-1}$, siempre que M_t sea de rango completo, $p \geq n$, y $(I - F_t P_t)$ sea no singular, para cada $t = 1, \dots, T$.

²Dadas las observaciones del vector z_t , se identificará un proceso VARMA; una vez identificado y estimado el proceso, podrá obtenerse su representación VMA de orden infinito.

Demostración: ver apéndice 1.

La proposición requiere que las matrices M_t , de orden $p \times n$, tengan un número de filas no inferior al número de columnas, $p \geq n$. Ello significa que debe haber en el modelo un número no inferior de variables observables que de variables no observables. En las aplicaciones que presentamos, $p = n$. Si p fuera inferior a n , la solución para P_t no sería única, y habría que seleccionar una de ellas mediante restricciones adicionales. Si, siendo $p \geq n$, fuese $rg(M_t) < n$, existirían relaciones redundantes entre y_t y z_t que habría que eliminar previamente.

Esta proposición podría generalizarse para el caso en que se tuvieran expectativas formadas en t de variables en el instante $t + j$, $j = 1, 2, \dots, q$. (véase Ruiz, 2000).

Una vez que hemos expresado el sistema [1] en la forma [5] podemos utilizar el resultado de Cerdá (1992) para calcular la estimación mínimo-cuadrática de y_t dado z_t y el conjunto de información I_t , que denotaremos por $\hat{y}_{t|t}$, ya que la expresión [5] es el tipo de sistema dinámico con expectativas racionales cuya solución, utilizando el filtro de Kalman, fue generalizada por Cerdá.

3. Aplicación: calibración de parámetros en modelos de ciclo real

En esta sección se aplican los resultados teóricos anteriores con el objetivo de calibrar parámetros a partir del ajuste entre las variables del modelo teórico y las observadas en una economía real. En particular, se estima el parámetro de aversión relativa al riesgo, tanto en el modelo de crecimiento neoclásico de Brock y Mirman (1972) como en una extensión de este modelo con oferta de trabajo elástica, bajo dos especificaciones alternativas. El objetivo último de la estimación de la aversión relativa al riesgo en estos dos modelos con oferta de trabajo elástica es el de discriminar entre estas dos especificaciones aquélla que se ajusta más a los datos observados a partir de una función de pérdida comparable en ambos modelos.

3.1 Descripción del modelo y su especificación en la forma del sistema [1].

Sea el modelo de crecimiento neoclásico de Brock y Mirman que de-

notamos por Modelo 1:

$$\underset{\{c_t, k_t\}}{\text{MAX}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad [6]$$

sujeto a:

$$c_t + k_t - (1 - \delta)k_{t-1} = \theta_t k_{t-1}^\alpha \quad [7]$$

$$\ln \theta_t = \phi \ln \theta_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\epsilon^2), |\phi| < 1 \quad [8]$$

$$k_{-1}, \theta_{-1} \text{ dados} \quad [9]$$

donde β , σ , δ , α son el parámetro de descuento temporal, la aversión relativa al riesgo, la tasa de depreciación del *stock* de capital y su elasticidad, respectivamente. Las variables c_t , k_t denotan el consumo y el *stock* de capital. E_0 denota la esperanza condicional al conjunto de información del instante 0.

El problema consiste en encontrar las secuencias de consumo y capital a lo largo del tiempo que maximicen el valor esperado de la suma descontada de la utilidad de un consumidor representativo (expresión [6]) sujeto a: i) la restricción de recursos de la economía: la producción (lado derecho de [7]) debe ser igual al consumo más la inversión (lado izquierdo de [7]); ii) un proceso estocástico para el *shock* de productividad (θ_t), [8]; y iii) unas condiciones iniciales para la variable de estado y para el *shock* de productividad, [9].

Las condiciones de optimalidad de este problema son:

$$\begin{aligned} c_t^{-\sigma} &= \beta E_t H_{t-1} \\ H_t &= c_t^{-\sigma} (\theta_t \alpha k_{t-1}^{\alpha-1} + 1 - \delta) \\ c_t + k_t - (1 - \delta)k_{t-1} &= \theta_t k_{t-1}^\alpha \\ \ln \theta_t &= \phi \ln \theta_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned} \quad [10]$$

para $t = 0, 1, 2, \dots$, donde utilizamos ahora la notación más habitual $E_t H_{t+1}$ para denotar $H_{t+1|t}^*$. Las condiciones de primer orden se completan con la condición de transversalidad $\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_{t+\tau} (c_{t+\tau+1}^{-\sigma} k_{t+\tau+1}) = 0$.

Si linealizamos el sistema [10] en los logaritmos de las variables c_t, k_t, H_t, θ_t alrededor del estado estacionario (definido éste como el equilibrio determinista del modelo si $x_t = x_{t-1}$, $\theta_t = 1$, $\epsilon_t = 0$, \forall_t , con $x = c, k$), podemos expresar el sistema de esta forma:

$$\Omega_0 y_t = \Omega_1 y_{t-1} + \Omega_2 y_{t+1|t}^* + \Omega_3 \epsilon_t, t = 1, 2, \dots \quad [11]$$

donde

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \frac{-\sigma}{\beta} c_{ss}^{-\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma c_{ss}^{-\sigma} (\alpha k_{ss}^{\alpha-1} + 1 - \delta) & H_{ss} & 0 & -c_{ss}^{\sigma} \alpha k_{ss}^{\alpha-1} \\ c_{ss} & 0 & k_{ss} & -k_{ss}^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ss}^{-\sigma} \alpha (\alpha - 1) k_{ss}^{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha k_{ss}^{\alpha} + (1 - \delta) k_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi \end{bmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & H_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$y_t = \begin{bmatrix} \ln c_t - \ln c_{ss} \\ \ln H_t - \ln H_{ss} \\ \ln k_t - \ln k_{ss} \\ \ln \theta_t \end{bmatrix}, y_{t+1|t}^* = \begin{bmatrix} E_t(\ln c_{t+1} - \ln c_{ss}) \\ E_t(\ln H_{t+1} - \ln H_{ss}) \\ E_t(\ln k_{t+1} - \ln k_{ss}) \\ E_t(\ln \theta_{t+1}) \end{bmatrix}$$

Dado que Ω_0 es invertible, podemos expresar [11] como:

$$y_t = G y_{t-1} + F y_{t+1|t}^* + \varepsilon_t, \quad [12]$$

donde $G = \Omega_0^{-1} \Omega_1$, $F = \Omega_0^{-1} \Omega_2$, $\varepsilon_t = \Omega_0^{-1} \Omega_3 \varepsilon_t$. Por tanto, la expresión [12] toma la forma del sistema [1].

El modelo 2 se caracteriza por una función de utilidad como la propuesta por Hansen (1985), donde el trabajo (l_t) es indivisible:

$$U(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - A_N l_t.$$

Alternativamente, el modelo 3 se caracteriza por una función de utilidad en la que el trabajo es divisible entrando de forma no lineal:

$$U(c_t, l_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - l_t^{A_N}.$$

En los modelos 2 y 3 el agente representativo maximiza la suma descontada de las utilidades dadas antes, y está sujeto a las mismas restricciones que en el modelo 1, si bien la función de producción (lado

derecho de [7]) es ahora: $\theta_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$ y, a lo largo de la senda óptima, $l_t \in (0, 1)$.

Como también se estimará la aversión relativa al riesgo, σ , en los modelos 2 y 3, ambos problemas podrán ser presentados en la forma del sistema [1] de manera análoga al procedimiento seguido para el modelo 1. Así, con el fin de obtener un sistema análogo a [12] para cada modelo, utilizamos las condiciones de primer orden contemporáneas (la relación marginal de sustitución consumo/ocio es la productividad marginal del trabajo) de los Modelos 2 y 3 para eliminar el tiempo de trabajo de las condiciones de primer orden. De esta manera, el sistema análogo a [12] de ambos modelos estará definido para las mismas variables: $\{c_t, k_t, H_t, \theta_t\}$, siendo únicamente algunos elementos de las matrices Ω_0 y Ω_1 particulares para cada modelo:

$$\text{Modelo 2 : } \Omega_0(2, 1) = \sigma c_{ss}^{-\sigma} \left[\left(\frac{1-\alpha}{A_N} c_{ss}^{-\sigma} \right) + 1 - \delta \right],$$

$$\Omega_0(2, 4) = -c_{ss}^{-\sigma/\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{A_N} \right)^{(1-\alpha)/\alpha},$$

$$\Omega_0(3, 1) = c_{ss} + \left(\frac{1-\alpha}{A_N} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} c_{ss}^{-\sigma(1-\alpha)/\alpha} k_{ss}$$

$$\left(\frac{\sigma(1-\alpha)}{\alpha} \right),$$

$$\Omega_0(3, 4) = -\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{A_N} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} c_{ss}^{-\sigma(1-\alpha)/\alpha} k_{ss},$$

$$\Omega_1(2, 3) = 0, \Omega_1(3, 3) = (\Omega_0(2, 1)k_{ss})/(\sigma c_{ss}^{-\sigma}).$$

$$\text{Modelo 3 : } \Omega_0(2, 1) = \sigma \alpha \left(1 + \frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)} \right)^{-\sigma} c_{ss}^{\left(1 + \frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)} \right)}$$

$$k_{ss}^{-\left(1 + \frac{\alpha}{A_N - (1-\alpha)} \right)} \left(\frac{1-\alpha}{A_N} \right)^{\frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)}} + \sigma c_{ss}^{-\sigma} (1-\delta),$$

$$\Omega_0(2, 4) = -\alpha c_{ss}^{-\sigma \left(1 + \frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)} \right)} k_{ss}^{-\left(1 - \frac{\alpha}{A_N - (1-\alpha)} \right)}$$

$$\left(1 + \frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)} \right) \left(\frac{1-\alpha}{A_N} \right)^{\left(\frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)} \right)},$$

$$\Omega_0(3, 1) = c_{ss} + \left(\frac{\sigma(1-\alpha)}{A_N - (1-\alpha)} \right) c_{ss}^{-\frac{\sigma(1-\alpha)}{A_N - (1-\alpha)}}$$

$$\begin{aligned}
& k_{ss}^{\alpha \left(1 + \frac{1}{A_N - (1-\alpha)}\right)} \left(\frac{1-\alpha}{A_N}\right)^{\frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)}}, \\
\Omega_0(3,4) &= -c_{ss}^{-\frac{\sigma(1-\alpha)}{A_N - (1-\alpha)}} k_{ss}^{\alpha \left(1 + \frac{1}{A_N - (1-\alpha)}\right)} \\
& \left(\frac{1-\alpha}{A_N}\right)^{\frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)}} \left(1 + \frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)}\right), \\
\Omega_1(2,3) &= -(1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{A_N - (1-\alpha)} - 1\right) \\
\Omega_0(2,4) & \left(1 + \frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)}\right)^{-1}, \\
\Omega_1(3,3) &= c_{ss}^{-\frac{\sigma(1-\alpha)}{A_N - (1-\alpha)}} k_{ss}^{\alpha \left(1 + \frac{1}{A_N - (1-\alpha)}\right)} \\
& \left(\frac{1-\alpha}{A_N}\right)^{\frac{1-\alpha}{A_N - (1-\alpha)}} \alpha \left(1 + \frac{1}{A_N - (1-\alpha)}\right) + (1-\delta)k_{ss}.
\end{aligned}$$

3.2 Estimación de la aversión relativa al riesgo.

Para cada uno de los tres modelos establecemos las hipótesis de que: (i) el sistema [12], o su análogo para los modelos 2 y 3, es el proceso generador de datos de una economía real particular; y, (ii) el vector de series temporales observadas $\{z_t\}$ se relacionan con las series temporales teóricas $\{y_t\}$ y con un vector de ruidos de observación $\{w_t\}$ mediante:

$$z_t = y_t + w_t. \quad [13]$$

En lo que sigue, se especifica el procedimiento de estimación para la aversión relativa al riesgo del Modelo 1. El procedimiento para los Modelos 2 y 3 es análogo.

La expresión [13] es la ecuación de observación [2] en la que se ha postulado que $M_t = I$ y que $Ew_t w_t' = W, \forall t$ diagonal. Es decir, existe una relación uno a uno entre las variables observadas y las teóricas ($M_t = I$) y el error de observación de un componente de y_t (por ejemplo, el consumo), no condiciona el error de observación de otro componente del vector y_t (por ejemplo, el *stock* de capital).

El primer paso de esta aplicación consiste en construir un vector de series temporales $\{z_t\}$ análogas a las del modelo teórico, que representen la economía real. Para ello, dado que las variables del modelo teórico son estacionarias y las variables de la economía real no lo son, en general, utilizaremos, como es habitual, sus series temporales en loga-

ritmos, transformadas a través del filtro de Hodrick y Prescott³ (1997) obteniendo así series estacionarias, con media cero, con objeto de explicar las fluctuaciones cíclicas alrededor de la tendencia. El resultado de aplicar este proceso a las series temporales de datos de consumo y stock de capital serán z_{1t} y z_{3t} en [13], análogas a las teóricas y_{1t} e y_{3t} .

Para generar datos para la variable z_{4t} , se estimaría el residuo de Solow, utilizando la estrategia de Prescott (1986). El resultado, z_{4t} , sería la variable análoga a y_{4t} del modelo teórico⁴.

Para construir datos para z_{2t} se debería, en primer lugar, calibrar los parámetros del modelo, en la forma habitual: i) α como la participación del *stock* de capital privado en la producción real; y, ii) la tasa de depreciación δ a través de una regresión entre el *stock* de capital menos la inversión y el *stock* de capital del periodo anterior; en segundo lugar, fijar una condición inicial para el valor de la aversión relativa al riesgo acorde con alguna estimación previa obtenida de la literatura de ciclo real⁵. Y, en tercer lugar, podemos construir, con las series de consumo, *stock* de capital y el residuo de Solow, la serie⁶ $\hat{H}_t = \hat{c}_t^{-\hat{\sigma}} (\hat{\theta}_t \hat{\alpha} k_{t-1}^{\hat{\alpha}-1} + 1 - \hat{\delta})$; si transformamos esta serie en logaritmos y la filtramos a través del filtro de Hodrick y Prescott, obtenemos una serie temporal análoga a y_{2t} .

Más adelante, mantenidos constantes los valores numéricos de $\alpha, \beta, \phi, \sigma_e, \delta$, iteramos sobre el valor de σ , objeto de estimación.

Un vez construido el vector de series temporales z_t , postulamos que el modelo teórico representado por [12] explica la economía real del país seleccionado y que los datos de series temporales reales z_t que obser-

³A pesar de que la utilización del filtro de Hodrick y Prescott es estándar en la literatura del ciclo real como una definición operacional del ciclo, éste ha sido criticado fundamentalmente por la posibilidad de crear ciclos espúreos y distorsionar el componente cíclico estimado (véanse Harvey, 1989 y Harvey y Jaeger, 1993). Sin embargo, utilizamos esta descomposición con el fin de que los resultados que se obtienen estén en la línea estándar de esta literatura, pero, no obstante, la metodología que se presenta no es dependiente del procedimiento de filtrado y podrían utilizarse otros filtros menos restrictivos como el de Maravall (1987).

⁴Podrían estimarse los parámetros ϕ, σ_e^2 de [8] a partir de la serie del residuo de Solow estimada.

⁵Por ejemplo, podría seleccionarse como valor inicial de σ el obtenido por Mehra y Prescott (1985). Para los modelos utilizados en esta aplicación, esta elección, no influye en la estimación final, si bien, no es un resultado que podamos generalizar para otros modelos.

⁶El símbolo “^” sobre una variable o sobre un parámetro denota respectivamente, una serie temporal o un parámetro calibrado.

vamos son una medida, con ruido, de las series temporales teóricas y_t , con las que se relacionan según [13], para una matriz de covarianzas W dada. El objetivo es encontrar (mediante una red de búsqueda⁷, por ejemplo) el valor de σ tal que se alcance el valor mínimo de $\sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{t|t})' W^{-1} (z_t - \hat{y}_{t|t})$. Para obtener esta estimación de σ antes deberá ser estimada la matriz P_t , que será igual a la matriz $\hat{\Phi}_1$, es decir, la estimación de la primera matriz de la descomposición de Wald para el proceso VARMA identificado y estimado del vector $\{z_t\}$ (véase apéndice 1 para el caso en que $M_t = I, \forall t$). Nótese que la estimación de sigma es condicional a la matriz W (calculamos esta matriz de forma recursiva como aparece en el apéndice 2, restringiendo a que sea diagonal y partiendo inicialmente de una matriz diagonal escalar $\sigma_w^2 I$), y a la matriz Γ , ya que la estimación $\hat{y}_{t|t}$ requiere la condición final $y_{T+1|T-1}^* = \Gamma y_{T|T-1}^*$ propuesta por Chow (1980) (véase Cerdá, 1992). Para muestras "grandes" la elección de Γ será poco sensible sobre el resultado final.

Calcular $\hat{y}_{t|t}$ utilizando la metodología expuesta en la sección 2 es comparable a simular el modelo a través de una aproximación log-lineal. Las similitudes y diferencias entre ambos procedimientos es de interés, si bien están fuera de los objetivos de este trabajo. La estimación $\hat{y}_{t|t}$ sugiere que la estabilidad de nuestro procedimiento estará garantizada por el hecho de que el conjunto de información I_t está formado por un vector de variables observables estacionarias que impedirá que la solución generada $\hat{y}_{t|t}$, sea no estacionaria o inestable. Téngase en cuenta que los autovalores de la matriz $\Omega_0^{-1} \Omega_1$ son tales que uno de ellos será mayor en valor absoluto que $\beta^{-1/2}$ por lo que la solución del sistema será de punto de silla⁸ (existe un único subespacio estable dado k_{-1} tal que el sistema evoluciona hacia el equilibrio de estado estacionario). Así, dado que la solución es del tipo $\hat{y}_{t|t} = (I - D_t) Q_t \hat{y}_{t-1|t-1} + D_t z_t$ (véase Cerdá, 1992), si z_t es estacionario, una condición suficiente es que los autovalores de $(I - D_t) Q_t$ tengan norma menor que 1 para que $\hat{y}_{t|t}$ sea estacionaria (en la aplicación empírica se ha comprobado que dicha matriz satisface esa condición).

Los resultados obtenidos acerca del valor calibrado de la aversión rela-

⁷En el apéndice 2 se especifica un método de solución recursivo para estimar parámetros del modelo minimizando la distancia entre \hat{z}_t e $\hat{y}_{t|t}$, lo que resulta más apropiado que un red de búsqueda cuando son múltiples los parámetros a estimar.

⁸Existe un autovalor inestable que genera una dirección o autovector inestable. Si se anula esta dirección, el sistema evolucionará a lo largo de un subespacio estable.

tiva al riesgo para el caso de la economía española⁹ son dependientes de la matriz de varianzas y covarianzas del ruido de observación si estimamos σ suponiendo $W = \sigma_w^2 I$. Cuanto mayor es σ_w^2 menor es el grado de ajuste requerido entre las variables observadas y las teóricas por lo que la función de pérdida es muy “plana” siendo el cálculo de σ poco preciso. Sin embargo, cuanto menor es σ_w^2 mayor es el nivel de exigencia en el ajuste, por lo que existe un límite inferior para esta varianza por debajo del cual no hay ningún vector de series $\hat{y}_{t|t}$ que se ajuste con ese nivel de precisión a los datos. Esta varianza es, por tanto, una señal del grado de precisión que es posible alcanzar.

CUADRO 1

Modelo 1. Estimaciones de la aversión relativa al riesgo que minimizan cada una de las sumas residuales SR, SR_1, SR_2, SR_3 para diferentes varianzas del error de observación.

	SR	SR ₁	SR ₂	SR ₃
$\sigma_w^2=0.000100$	2,91	2,91	2,91	2,91
$\sigma_w^2=0.000050$	2,91	2,51	2,91	2,91
$\sigma_w^2=0.000010$	2,91	2,01	2,91	2,21
$\sigma_w^2=0.000005$	2,91	2,01	2,91	2,01
$\sigma_w^2=0.000001$	2,91	1,71	2,91	2,01

$$SR: \sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{t|t})' (z_t - \hat{y}_{t|t}); SR_1: \sum_{t=0}^T (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t|t})' (z_{1,t} - \hat{y}_{1,t|t}); SR_2: \sum_{t=0}^T (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t|t})' (z_{2,t} - \hat{y}_{2,t|t});$$

$$SR_3: \sum_{t=0}^T (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t|t})' (z_{3,t} - \hat{y}_{3,t|t})$$

El Cuadro 1 refleja los valores de la aversión relativa al riesgo calibrados en función de σ_w^2 y de la función de pérdida que tomemos como referencia: suma residual de las variables en su conjunto (SR), suma residual del consumo actual y estimado (SR_1), suma residual del *stock* de capital actual y estimado (SR_2) y suma residual de la expectativa actual y estimada (SR_3). En general, la calibración de la aversión relativa al riesgo es poco sensible a cambios en σ_w^2 , excepto cuando se toma como referencia la suma residual del consumo estimado. Si tomamos esta función de pérdida como referencia, se concluye que, para la economía española, replicar el proceso estocástico del consumo implica una aversión relativa al riesgo menor que la que replicaría el conjunto las series estudiadas en este modelo, supuesto que el modelo teórico fuera el generador del proceso estocástico de los datos de la economía española.

⁹Se han recogido datos del PIB, ocupados, consumo e inversión del Informe de Previsión y Coyuntura del Ministerio de Economía y Hacienda. La muestra es trimestral desde 1976:3 hasta 1998:2. El resto de los parámetros calibrados son: $\alpha = 1/3; \beta = 0.9524; \phi = 0.9211; \sigma_\epsilon = 0.0000068; \delta = 0.025$.

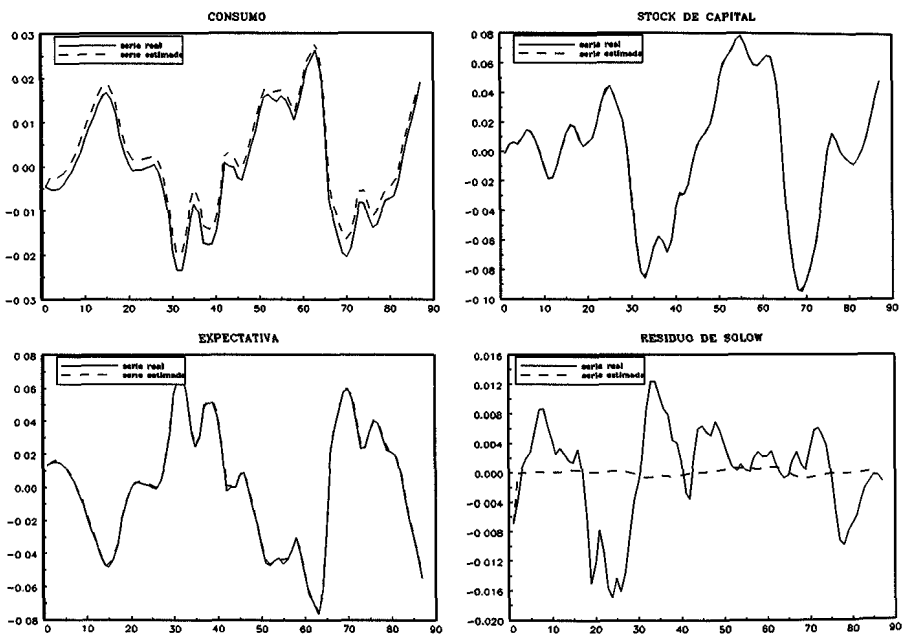
Por otro lado, si estimamos la matriz W diagonal no escalar¹⁰ que minimiza la suma residual, la estimación de la aversión relativa al riesgo no varía significativamente. Las estimaciones de los elementos de la diagonal de W son:

$$\hat{\sigma}_{w,1}^2 = 6.7 \cdot 10^{-6}, \hat{\sigma}_{w,2}^2 = 4.1 \cdot 10^{-6}, \hat{\sigma}_{w,3}^2 = 2.1 \cdot 10^{-9}, \hat{\sigma}_{w,4}^2 = 4.3 \cdot 10^{-5}.$$

En el Gráfico 1 aparecen los datos reales y estimados para los valores de σ y W diagonal óptimos. Puede comprobarse que únicamente el residuo de Solow es el que tiene un menor ajuste.

GRÁFICO 1

Series históricas filtradas y series estimadas para el parámetro de la aversión relativa al riesgo estimado. Modelo 1



3.3 Resolviendo la ausencia de identificación de modelos

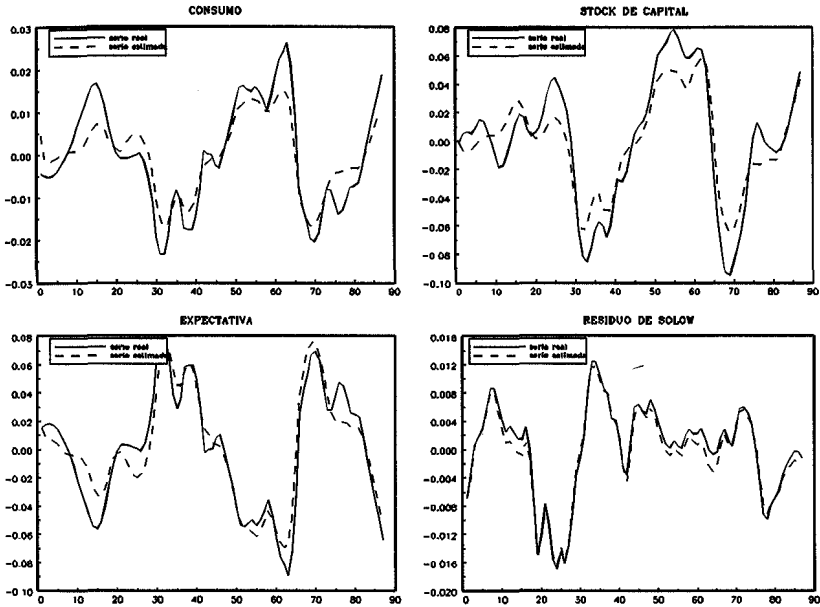
Si al investigador se le presenta la disyuntiva de si debería utilizar un modelo más complejo o no con el fin de ajustar mejor la economía real en su conjunto, podría utilizar las funciones de pérdida (SR, SR_1, SR_2, SR_3) , que en muchos casos serán comparables entre modelos alternativos para discriminar qué modelo se ajusta más a los datos una vez que se ha calibrado cada modelo.

A continuación estudiamos este punto utilizando las dos versiones al-

¹⁰Se estima una matriz W restringida en el sentido de que postulamos que los errores cometidos en la estimación de cada variable del vector \hat{y}_{it} tienen correlación nula, si bien se permite que el tamaño de los errores pueda ser distinto para cada variable.

ternativas del modelo de crecimiento neoclásico de Brock y Mirman con oferta de trabajo elástica antes definidas.

GRÁFICO 2
Series históricas filtradas y series estimadas para el parámetro de la aversión relativa al riesgo estimado. Modelo 2



Siguiendo los mismos pasos que con el modelo 1: log-linealización del sistema y construcción a partir de los datos de $\{z_t\}$ (sólo cambiará la variable $z_{3,t}$, es decir, H_t , podemos calibrar el parámetro σ junto con el nuevo parámetro A_N ¹¹: supondremos que la proporción de tiempo dedicado a trabajar a largo plazo (l_{ss}) es 1/3, de modo que para cada valor de sigma obtenemos un valor A_N compatible con $l_{ss} = 1/3$.

Los Gráficos 2 y 3 muestran el tipo de ajuste obtenido para los valores de σ , A_N y la matriz W diagonal no escalar que minimizan la función de pérdida SR . Como puede observarse en los Gráficos 2 y 3, destacamos el hecho del buen comportamiento del modelo 2 para replicar la estructura estocástica de las series reales y que el modelo 3 únicamente genere una buena estimación para la serie de capital.

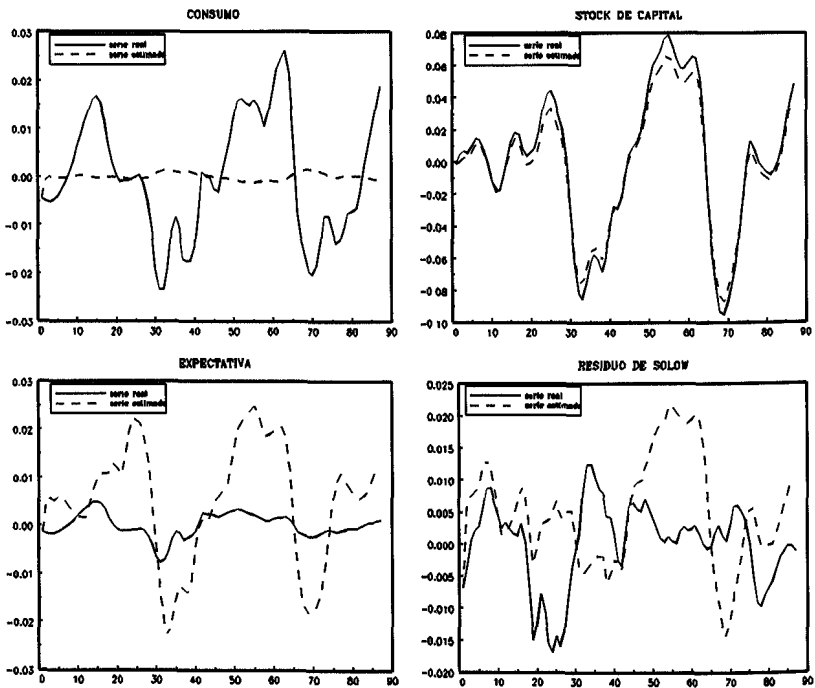
¹¹El resto de parámetros tienen los mismos valores que los datos para el modelo 1. Por supuesto, la estimación de A_N para cada modelo no es comparable por cuanto miden diferentes efectos. Sin embargo, las variables de ambos modelos en la forma [1] sí son comparables.

El Cuadro 2 recoge las calibraciones de σ , A_N para diferentes funciones de pérdida en ambas modelizaciones. También, como en la estimación de σ del modelo 1, se ha estimado una matriz W diagonal no escalar. En general, destacamos que, como en el modelo 1, el valor de la aversión relativa al riesgo que mejor replica su proceso estocástico es menor que el que replica el modelo en su conjunto, de modo que podemos concluir que la senda de consumo de la economía española es generada por una elasticidad intertemporal de sustitución bastante alta supuesto que estos modelos fueran la especificación correcta.

Cambios en la proporción del tiempo dedicado a trabajar postulado en el estado estacionario no generan cambios significativos en las calibraciones de σ y A_N en el modelo 2. Sin embargo, en el modelo 3 estas calibraciones son sensibles a variaciones en la proporción de tiempo dedicado a trabajar a largo plazo, como muestra el Cuadro 3. Por tanto, una especificación como la del modelo 2 es más estable desde

GRÁFICO 3

Series históricas filtradas y series estimadas para el parámetro de la aversión relativa al riesgo estimado. Modelo 3



el punto de vista de la calibración paramétrica, lo que implica una caracterización más precisa de sus parámetros

CUADRO 2

Estimaciones de la aversión relativa al riesgo y del parámetro A_N que minimizan cada una de las sumas residuales SR, SR_1, SR_2, SR_3 para los modelos 2 y 3

		SR	SR ₁	SR ₂	SR ₃
Modelo 2	$\hat{\sigma} =$	3,40	1,15	3,90	1,15
	$\hat{A}_N =$	6,96	2,42	8,81	2,42
Modelo 3	$\hat{\sigma} =$	4,41	0,66	4,91	4,41
	$\hat{A}_N =$	8,55	15,96	8,43	8,55

CUADRO 3

Estimaciones de la aversión relativa al riesgo y del parámetro A_N que minimizan cada una de las sumas residuales SR, SR_1, SR_2, SR_3 para diferentes valores de estado estacionario de la proporción de tiempo dedicado a trabajar

		SR	SR ₁	SR ₂	SR ₃
LSS=1/3	$\hat{\sigma}$	4,41	0,66	4,91	4,41
	\hat{A}_N	8,55	15,96	8,43	8,55
LSS=1/4	$\hat{\sigma}$	4,16	0,66	4,66	4,16
	\hat{A}_N	8,20	12,99	8,13	8,20
LSS=1/5	$\hat{\sigma}$	3,91	0,66	4,41	3,91
	\hat{A}_N	8,10	12,11	8,06	8,10

LSS: valor de estado estacionario de la proporción de tiempo dedicado a trabajar.

CUADRO 4

Valores de las sumas residuales óptimas para cada uno de los modelos estudiados

	SR	SR ₁	SR ₂	SR ₃
MODELO 1	0,00044	0,00059	0,00066	0,00002
MODELO 2	0,04300	0,00230	0,02532	0,00047
MODELO 3	0,04220	0,01320	0,01300	0,00340

Por último, el Cuadro 4 resume los valores óptimos de las diferentes funciones de pérdida utilizadas para cada modelo. Destacamos que, con los datos utilizados, el modelo 1 tiene un mejor comportamiento a la hora de replicar los procesos estocásticos observados para la economía española.

Estas medidas son comparables entre modelos y pueden ayudarnos a discriminar entre ellos más fácilmente que las medidas utilizadas habitualmente en la literatura como son comparar correlaciones entre variables teóricas para contrastar modelos ya que se utiliza una información más limitada, no siendo difícil generar modelos observacionalmente equivalentes.

4. Conclusión

En este trabajo, utilizando el filtro de Kalman, se calcula la estimación de una variable no observable cuya evolución es conocida a través de un sistema dinámico con expectativas racionales, formadas en el presente, del futuro de dicha variable y dada una variable observable que se relaciona con la no observable linealmente y con incertidumbre.

Utilizamos esta generalización del filtro de Kalman para aplicarla como instrumento de calibración de los parámetros contenidos en modelos estocásticos de crecimiento bajo el supuesto de expectativas racionales, siendo la estimación de estos parámetros difícil dada la ausencia de datos apropiados en la economía real para su estimación. Así, estudiamos en tres modelos alternativos, cuál es la aversión relativa al riesgo para la economía española que mejor replica el comportamiento estocástico de algunas series históricas reales. La ventaja de aplicar este método para estimar estos parámetros es su sencillez y su bajo coste computacional.

Por último, utilizamos la función de pérdida con la que evaluamos la calibración de los parámetros como medida para comparar y discriminar modelos, cuando ésta es comparable entre modelos como los ejemplos aquí presentados. Concluimos que es el modelo más simple, con oferta de trabajo inelástica el que tiene un comportamiento mejor ajustando los procesos estocásticos de las variables observadas para la economía española, si bien este resultado no es concluyente ya que está sujeto al supuesto de diagonalidad de W , pero ilustra el tipo de conclusiones a las que se puede llegar a través de esta metodología.

Las extensiones naturales en este trabajo son: i) estimar los parámetros

relevantes del modelo junto con la matriz de varianzas y covarianzas W sin restringir; y ii) estudiar las propiedades de esta metodología en la estimación de otros parámetros sobre los que sabemos con mayor precisión, por otros métodos de calibración, su valor y contrastarlo con el que se obtendría con este procedimiento presentado.

Apéndice 1. Demostración de la proposición 1

Dado que y_t es un proceso estocástico vectorial, podemos expresarlo a través de su descomposición de Wald, dado el conjunto de información I_t , como¹² $y_t = a_t + \Psi_{1,t}a_{t-1} + \Psi_{2,t}a_{t-2} + \dots = \Psi_t(B)a_t$, con a_t vector de ruido blanco.

Por otro lado, a_t es el error de previsión un periodo hacia adelante de y_t : $y_t - y_{t+1|t}^* = a_t$. Además, bajo racionalidad, podemos expresar $y_{t|t-1}^*$ en función del error de previsión un periodo hacia adelante en t y de la expectativa $y_{t+1|t-1}^*$:

$$y_{t+1|t}^* = \Psi_{1,t}a_t + y_{t+1|t-1}^* = \Psi_{1,t}(y_t - y_{t|t-1}^*) + y_{t+1|t-1}^*. \quad [A.1]$$

Dados los supuestos del problema, el vector de variables y_t no es observable por lo que no podemos estimar la matriz $\Psi_{1,t}$ a partir de y_t . Sin embargo, dado [2], podemos estimar esta matriz en tanto que conocemos el proceso estocástico seguido por z_t . Por tanto, teniendo en cuenta que $cov(z_t, z_{t-1}) = \Phi_{1,t}$ y que $cov(z_t, z_{t-1}) = M_t \Psi_{1,t} M_{t-1}'$, se tiene que $\Psi_{1,t} = (M_t' M_t)^{-1} M_t' \Phi_{1,t} M_{t-1} (M_{t-1}' M_{t-1})^{-1} = P_t$.

Por tanto, la expresión [A.1] queda como sigue:

$$y_{t+1|t}^* = P_t(y_t - y_{t|t-1}^*) + y_{t+1|t-1}^*. \quad [A.2]$$

Sustituyendo [A.2] en [1] llegamos a la expresión [5].

Apéndice 2. Explicación del algoritmo de estimación

En este apéndice se describe el algoritmo recursivo que estima un vector γ de parámetros minimizando la función de pérdida $\sum_{t=0}^T (z_t - M \hat{y}_{t|t})' W^{-1} (z_t - M \hat{y}_{t|t})$, teniendo en cuenta que $\hat{y}_{t|t}$ es función de γ :

$$\underset{\gamma}{Min} \sum_{t=0}^T (z_t - \hat{y}_{t|t}(\gamma))' W^{-1} (z_t - \hat{y}_{t|t}(\gamma)) \quad (P)$$

Antes, se comenta brevemente la naturaleza del procedimiento de cálculo:

¹²Nótese que las matrices del proceso estocástico Ψ dependen del tiempo dado que son condicionales al conjunto de información, por ser y_t no observable.

En términos genéricos, sea $w_t = [w_{1t}, \dots, w_{nt}]'$, $\hat{y}_{t|t}(\gamma) = [\hat{y}_{1,t|t}(\gamma), \dots, \hat{y}_{n,t|t}(\gamma)]'$ y $z_t = [z_{1t}, \dots, z_{nt}]'$. Sea $\gamma^{(0)} = [\gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_g^{(0)}]'$ el valor inicial del vector de parámetros para el cual se obtiene la primera estimación de y_t : $\hat{y}_{t|t}^{(0)}$; sea $w_t^{(0)} = z_t - \hat{y}_{t|t}^{(0)}$. Si se aproxima linealmente w_t (que es función de γ) alrededor de $\gamma^{(0)}$, se tiene:

$$w_{rt} = w_{rt}^{(0)} - \sum_{i=1}^g (\gamma_i - \gamma_i^{(0)}) (\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)} / \partial \gamma_i), \quad r = 1, \dots, n.$$

La expresión anterior equivale a:

$$w_{rt}^{(0)} + \sum_{i=1}^g \gamma_i^{(0)} \left(\frac{\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)}}{\partial \gamma_i} \right) = w_{rt} + \sum_{i=1}^g \gamma_i \left(\frac{\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)}}{\partial \gamma_i} \right), \quad r = 1, \dots, n,$$

es decir, $\omega_{r,t}^{(0)} = \sum_{i=1}^g \gamma_i^{(0)} \zeta_{r,i,t}^{(0)} + w_{r,t}$, $r = 1, \dots, n$, $t = 0, \dots, T$. Esta expresión no es más que un sistema de n ecuaciones del que deben estimarse las componentes del vector γ , siendo $\omega_t^{(0)}$ el vector $n \times 1$ de variables dependientes y $\zeta_t^{(0)}$ la matriz de variables independientes:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{1,t} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_{n,t} \end{bmatrix},$$

donde $\zeta_{r,t} = [\zeta_{k,1,t}, \dots, \zeta_{k,g,t}]$, $r = 1, \dots, n$, $\zeta_{r,1,t} = (\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)} / \partial \gamma_i)$, y w_t es el vector de ruido. Estimar los parámetros del vector γ equivale a estimar por MCG el vector η , ($n \times 1$) del sistema

$$\begin{bmatrix} \omega_1^{(0)} \\ \dots \\ \omega_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_n^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{1,1} \\ \dots \\ \eta_{g,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} \quad [\text{A.3}]$$

restringido a que $\eta_{i,1} = \eta_{i,2} = \dots = \eta_{i,n} = \gamma_i$, para $i = 1, \dots, g$.

Algoritmo:

1. Dado $\gamma^{(0)}$ y el resto de las matrices dependientes de los parámetros, y dado z_t , estimar $\hat{y}_{t|t}^{(0)}$ utilizando el algoritmo del filtro de Kalman.
2. Calcular las derivadas numéricas $(\partial \hat{y}_{r,t|t}^{(0)} / \partial \gamma_i)$ para $r = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n$ evaluadas en $\gamma^{(0)}$.
3. Calcular $\omega_{rt}^{(0)}, \zeta_{rt}^{(0)}$, $t = 0, \dots, T$, $r = 1, \dots, n$.

4. Estimar $\gamma_i = 1, \dots, g$ por mínimos cuadrados generalizados restringidos a partir del sistema [A.3], obteniendo $\gamma^{(1)}$.
5. Escoger un criterio de convergencia como, por ejemplo, el siguiente: si $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{ij}^{(0)} - m_{ij}^{(1)})^2$ es menor que un cierto valor tan pequeño como se quiera, entonces $\gamma_i^{(1)}, i = 1, \dots, g$ será el estimador de γ que minimiza (P). Si fuera mayor que ese cierto valor, entonces utilizar $\gamma^{(1)}$ como condición inicial de γ y volver al paso 1.

Puede comprobarse que utilizar este algoritmo es equivalente a resolver (P) por Gauss-Newton.

Dado que este algoritmo está sujeto a que W es una matriz escalar, podemos estimar esta matriz a partir de un procedimiento recursivo como el siguiente: i) Estimar γ para $W = \sigma_w^2 I$; ii) calcular la matriz de varianzas y covarianzas muestral $\hat{W} = (1/T)[(z - \hat{y})(z - \hat{y})']$, donde $\hat{y} = [\hat{y}_{1|1}, \dots, \hat{y}_{T|T}]$ y $z = [z_1, \dots, z_T]$, matrices $n \times T$; iii) sea \hat{W}_c la matriz de correlaciones estimada y W_c la matriz de correlaciones inicial (la identidad en este caso). Como criterio de discrepancia entre estas dos matrices utilizamos la norma euclídea definida como $\|A\|_c = (\sum_1^n \sum_1^n |a_{ij}|^2)^{1/2} \cdot (1/n^2)$, que tiene como interpretación aproximada la correlación media de A . Por tanto, si $|\|\hat{W}_c\| - \|W_c\||$ es inferior a un cierto valor (podría ser $1/\sqrt{T}$, ya que para muestras “grandes” la desviación típica de la correlación es ese valor) diremos que este proceso ha convergido y la matriz W inicial es la que mejor ajusta los datos; si es mayor que ese valor, \hat{W}_c será la matriz inicial bajo la cual estimar γ y volvemos a (ii).

References

- Aoki, M. y M. Canzoneri (1979): “Reduced forms of rational expectations models”, *The Quarterly Journal of Economics* 94, pp. 59-71.
- Bertsekas, D. (1976), *Dynamic Programming and Stochastic Control*. Academic Press, New York.
- Blanchard, O.J. y C.M. Kahn (1980): “The solution of linear difference models under rational expectations”, *Econometrica* 48, pp. 1305-1311.
- Brock, W.A. y L. Mirman (1972): “Optimal economic growth and uncertainty: the discounted Case”, *Journal of Economic Theory* 4, pp. 479-513.
- Burmeister E. y K.D. Wall (1982): “Kalman filtering estimation of unobserved rational expectations with an application to the german hyperinflation”, *Journal of Econometrics* 20, pp. 255-284.
- Cerdá, E. (1992): “Generalizaciones del filtro de Kalman a modelos con expectativas racionales”, *Revista Española de Economía* 9, pp. 129-148.

- Chow, G. (1980): "Econometrics policy evaluation and optimization under rational expectations", *Journal of Economics Dynamic and Control* 2, pp. 47-59.
- Christiano L.J. y R.J. Vigfusson (1999): "Maximum likelihood in the frequency domain: a time to build example", *NBER working paper* 7027.
- Gourieroux, C., J.J. Laffont y A. Monfort (1982): "Rational expectations in dynamic linear models: analysis of the solutions", *Econometrica* 50, pp. 409-425..
- Hansen, G. (1985): "Indivisible labor and the business cycle", *Journal of Monetary Economics* 16, pp. 309-327.
- Harvey, A.C. (1989), *Forecasting, Structural Times Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Harvey A.C. y A. Jaeger (1993): "Detrending, stylized facts and the business cycle", *Journal of Applied Econometrics* 8, pp. 231-247.
- Hodrick R.J. y E.C. Prescott (1997): "Postwar US business cycles: an empirical investigation", *Journal of Money, Credit and Banking* 29, pp. 1-16.
- Ingram, B.F. y B.S. Lee (1991): "Simulation estimation of time series models", *Journal of Econometrics* 2, pp. 197-207.
- Maravall, A. (1987): "Descomposición de series temporales: especificación, estimación e inferencia", *Estadística Española* 114, pp. 11-69.
- McGrattan E.R. (1994): "The macroeconomics effects of distortionary taxation", *Journal of Monetary Economics* 33, pp. 573-601.
- Mehra, R. y E.C. Prescott (1985): "The equity premium: a puzzle", *Journal of Monetary Economics* 15, pp. 145-161.
- Prescott, E.C. (1986): "Theory ahead of business cycle measurement", *Quarterly Review, Federal Reserve Bank of Minneapolis* 10, pp. 9-33.
- Ruiz, J. (2000): "Aplicaciones del filtro de Kalman a las calibraciones en modelos de ciclo real", Documento de Trabajo 0002 del Instituto Complutense de Análisis Económico.
- Sims, C.A. (1999): "Solving linear rational expectations models", *Computational Economics*, Forthcoming.
- Watson, M. (1993): "Measures of fit for calibrated models", *Journal of Political Economy* 101, pp. 1011-1041.

Abstract

This paper pursues two objectives. One is to generalize the Kalman Filter to dynamic models with rational expectations which include current expectations of future endogenous variables. A second objective is to illustrate two applications of this estimation procedure to stochastic rational expectations growth models. The first application is a proposal to calibrate some parameters in these models whose estimation is difficult because of the lack of appropriate data (for example, the coefficient of relative risk aversion). In the second application, the previous calibration procedure is used to offer an objective measure which allows for discriminating among alternative models that have, in some aspects, a similar stochastic behaviour.

Keywords: Kalman Filter, calibration, real business cycle models, rational expectations, dynamic systems.

*Recepción del original, noviembre de 1999
Versión final, diciembre de 2000*