

LA RESTRICCIÓN DE LAS PONDERACIONES EN EL ANÁLISIS ENVOLVENTE DE DATOS: UNA FORMULA PARA MEJORAR LA EVALUACION DE LA EFICIENCIA*

Francisco PEDRAJA CHAPARRO

Javier SALINAS JIMENEZ

Universidad de Extremadura

Peter SMITH

University of York

El análisis envolvente de datos (DEA) es un procedimiento que utiliza técnicas de programación lineal para evaluar la eficiencia de un conjunto de unidades de producción homogéneas. Este procedimiento está basado en la asignación de ponderaciones a los distintos factores incluidos en el análisis. La total flexibilidad de las mismas puede conducir a indicadores de eficiencia basados en ponderaciones que no sean consistentes con la importancia relativa de cada factor en el proceso productivo. En este trabajo mostramos cómo la introducción de restricciones sobre las ponderaciones mejora considerablemente la estimación de eficiencia proporcionada por el modelo.

Introducción

El análisis envolvente de datos (DEA), desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes en 1978, es un procedimiento no paramétrico y determinístico de evaluación de la eficiencia relativa de un conjunto de unidades productivas homogéneas. Utilizando las cantidades de inputs y outputs consumidas y producidas por cada unidad, y mediante técnicas de programación lineal, el DEA construye, a partir de la «mejor práctica» observada, la frontera eficiente de producción con respecto a la cual se evalúa la eficiencia de cada unidad.

Como señalan Roll, Cook y Golany (1991), el DEA extiende el procedimiento clásico del análisis de ratios reduciendo una situación de múltiples inputs y múltiples outputs a un ratio de un output compuesto respecto a un input compuesto. La eficiencia relativa de una unidad se evalúa calculando el ratio de la suma ponderada de sus outputs con respecto a la suma ponderada de sus inputs. Las ponderaciones que se asignan a cada input y output se selec-

* Desearíamos agradecer los comentarios y sugerencias de Rafael Repullo y de dos evaluadores anónimos que han permitido mejorar la versión inicial del trabajo. Los errores que puedan subsistir son de nuestra exclusiva responsabilidad.

cionan, para cada unidad, de la forma más favorable posible de manera que las utilizadas en la evaluación de una unidad pueden ser totalmente diferentes a las seleccionadas en la evaluación de otra.

Desde que el modelo DEA fue propuesto, hace quince años, y a pesar del desarrollo producido tanto en sus aspectos teóricos como empíricos, se ha prestado muy poca atención a las ponderaciones utilizadas en el análisis de la eficiencia. Esta omisión no deja de ser sorprendente por el transcendental papel que las ponderaciones calculadas tienen en la evaluación de la eficiencia de las unidades analizadas.

El objetivo de esta investigación es examinar en qué medida la introducción de restricciones que aporten información sobre la importancia relativa de los distintos factores puede mejorar los resultados proporcionados por el modelo DEA. En la primera sección, describimos brevemente el modelo. A continuación, ofrecemos las principales razones que, a nuestro juicio, justifican el establecimiento de restricciones sobre las ponderaciones y su significado en términos económicos. Por último, utilizando datos simulados a partir de un proceso de producción suficientemente conocido, analizamos el comportamiento de las ponderaciones al variar el tamaño de la muestra y las consecuencias que tiene, en la medición de la eficiencia, un método de restricción de las ponderaciones que permita reflejar la importancia relativa de cada factor. Finalizamos el trabajo con el habitual apartado de conclusiones.

1. Breve descripción del modelo

El modelo DEA fue desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes (1978) basándose en el trabajo seminal de Farrell (1957). Mediante la utilización de técnicas de programación lineal, el DEA compara la eficiencia de un conjunto de unidades que producen outputs similares a partir de una serie de inputs comunes.

Para un conjunto de n unidades productivas que consumen n inputs y producen s outputs, la eficiencia de la unidad i puede medirse de la forma siguiente:

$$\text{Max } \frac{\sum_{r=1}^s U_r Y_{ri}}{U_{ri} V_{hi} \sum_{h=1}^m V_{hi} X_{hi}} \quad [1]$$

sujeto a:

$$\frac{\sum_{r=1}^s U_r Y_{ri}}{\sum_{h=1}^m V_{hi} X_{hj}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n.$$

$$U_r, V_{hi} \geq 0 \quad r = 1 \dots, s. \quad h = 1 \dots, m.$$

donde:

Y_{ri} : Cantidad de output r producido por la unidad i .

U_{ri} : Ponderación asignada al output r .

X_{hi} : Cantidad de input h consumido por la unidad i .

V_{hi} : Ponderación asignada al input h .

El método DEA es considerado por varios autores (Ganley y Cubbin (1992), Boussofiane *et al.* (1991) o Sherman (1984)) como una extensión del análisis tradicional de ratios output/input. La eficiencia de una unidad se define como el ratio de la suma ponderada de outputs con respecto a la suma ponderada de inputs.

El problema formulado consiste en encontrar el mejor conjunto de ponderaciones de inputs y outputs para la unidad analizada con la condición de que usando el mismo conjunto de ponderaciones, ninguna de las otras unidades de producción obtenga un ratio de eficiencia mayor que 1. Si, sujeto a esta restricción, es posible encontrar un conjunto de ponderaciones con las que el ratio de eficiencia de la unidad evaluada sea igual a 1, entonces será considerada eficiente¹. En caso contrario, la unidad será relativamente ineficiente, ya que incluso con el conjunto de ponderaciones más favorable puede encontrarse otra unidad que obtiene un ratio de eficiencia mayor.

El programa se computa separadamente para cada unidad de producción, generando n conjuntos de ponderaciones a aplicar sobre los inputs y outputs incluidos en el análisis. Los valores de las ponderaciones pueden ser distintos para cada unidad, ya que para cada una de ellas se seleccionan las ponderaciones de manera que su evaluación sea la más favorable, sujeta únicamente a la condición antes mencionada.

El DEA es, por tanto, una aproximación no paramétrica de medición de la eficiencia. Como nos recuerdan Banker *et al.* (1989), ni asume una forma funcional determinada para la frontera de producción, lo que la distingue de las aproximaciones paramétricas, ni especifica valores a priori para las ponderaciones que se aplican sobre inputs y outputs, lo que la diferencia del análisis tradicional de ratios.

2. Restricciones sobre las ponderaciones: principales justificaciones y significado económico

Tradicionalmente, se ha considerado que la flexibilidad es una de las principales ventajas de la técnica envolvente de datos. Si no existe ningún tipo de restricción sobre las ponderaciones, una unidad evaluada como ineficiente es intrínsecamente ineficiente. Es decir, obtiene un ratio de eficiencia menor que la unidad utilizando las ponderaciones que le son más favorables. La ine-

¹ Esta condición es necesaria, pero no suficiente. Además, las variables de holgura de los distintos inputs y outputs han de ser iguales a cero.

ficiencia de una unidad no puede, por tanto, imputarse al conjunto de ponderaciones utilizadas.

Sin embargo, la flexibilidad total de las ponderaciones puede ser criticada por diversas razones:

1. Las unidades externas o «outliers» son automáticamente evaluadas como eficientes. Si una unidad es superior al resto en un ratio output/input será evaluada como eficiente, ya que podrá basar su análisis exclusivamente en dicho ratio, asignando ponderaciones nulas a todos los demás factores.
2. Sin llegar al extremo anterior, puede ser que la eficiencia se evalúe sin considerar todos los inputs y outputs. Esto es difícilmente aceptable, sobre todo si las ponderaciones nulas se asignan a factores especialmente relevantes.
3. El supuesto implícito existente al permitir la flexibilidad total de las ponderaciones es que las unidades productivas puedan tener objetivos individuales o que circunstancias particulares deban considerarse en la evaluación de su eficiencia. Sin embargo, las unidades que se comparan han de ser homogéneas, es decir, han de producir los mismos outputs a partir de unos inputs comunes y han de tener los mismos objetivos globales. Aunque cierto grado de flexibilidad en los valores asignados a las ponderaciones parece deseable para que las unidades productivas reflejen sus circunstancias particulares, puede ser inaceptable que estos valores sean completamente diferentes para las distintas unidades.

En este contexto, la introducción de restricciones sobre las ponderaciones es de una importancia crucial. Estableciendo límites entre los cuales las ponderaciones puedan variar, se mantiene cierta flexibilidad y, con ello, se consideran las circunstancias específicas de las unidades productivas. Además, las unidades no pueden prescindir de los factores menos favorables en la evaluación de su eficiencia, asegurándose así la aplicación de ponderaciones mayores sobre los factores fundamentales².

En la medida que la restricción de las ponderaciones supone la formulación de juicios de valor sobre la importancia relativa de los distintos inputs y outputs, tal práctica puede ser criticada sobre la base de una posible pérdida de objetividad de la técnica. Debe tenerse en cuenta que, aunque exista total flexibilidad para las ponderaciones, el DEA no es una técnica «objetiva». También se formulan juicios de valor al seleccionar los inputs y outputs que

² La exigencia de restricciones adicionales sobre las ponderaciones puede impedir calcular la eficiencia de algunas unidades productivas, debido a que no exista un conjunto de ponderaciones óptimas que satisfaga todas las restricciones incluidas en el modelo. Del mismo modo, el establecimiento de un margen estrecho de variación para un subconjunto de ponderaciones puede afectar considerablemente a los rangos dentro de los cuales pueden variar los otros factores. La interacción de los límites sobre las ponderaciones y como afecta el establecimiento de dichos límites a las soluciones proporcionadas por el modelo no han sido estudiados y constituyen áreas interesantes en las que se puede desarrollar investigación adicional.

deben incluirse en el análisis de eficiencia. Siguiendo a Roll y Golany (1993), el proceso de selección de variables, que adquiere una importancia trascendental dado el carácter no paramétrico de la técnica, puede ser más difícil si se aplica el DEA sin restricción de las ponderaciones. En ese caso, la decisión se limita a incluir o no un factor, sin la posibilidad de establecer diferencias entre aquellos más y menos importantes; sin olvidar lo sorprendente que resulta introducir variables que son luego ignoradas en el cálculo de la eficiencia.

Las ponderaciones, V_{hi} y U_{ni} en la expresión [1], pueden ser interpretadas como los precios de los inputs y de los outputs. En ese caso, al aplicar el DEA tradicional, sin restringir las ponderaciones, calculamos una eficiencia de carácter técnico o productivo; es decir, para un conjunto de inputs, qué cantidad de outputs se produce con respecto a lo técnicamente posible (medida en términos de output). El cálculo de este tipo de eficiencia está especialmente justificado en el ámbito público, donde los precios, en el mejor de los casos, si existen, suelen ser sospechosos³. La eficiencia asignativa, distinta de la anterior, reflejaría en qué medida los inputs son empleados en unas proporciones equivocadas, dados sus precios y productividades en el margen.

Por tanto, unidades productivas globalmente ineficientes pueden serlo por razones técnicas, asignativas o por ambos motivos a la vez. A medida que introducimos restricciones sobre las ponderaciones que reflejen la importancia relativa de cada factor nos iremos aproximando al cálculo de la eficiencia global, que incluirá tanto la de carácter productivo como aquella debida a motivos asignativos⁴. Siguiendo con esta línea argumental, el análisis de ratios puede interpretarse como un caso límite del DEA en el que la flexibilidad de las ponderaciones se encuentra totalmente restringida, proporcionando entonces información sobre la eficiencia global.

3. Análisis de las ponderaciones y efectos en los resultados de restricciones adicionales sobre las mismas

Dividimos nuestro análisis en dos partes. En la primera analizamos el «comportamiento» de las ponderaciones al considerar muestras de diferentes tamaños. En la segunda, examinamos, para un conjunto de veinte unidades productivas, los efectos en los resultados del DEA de la introducción de restricciones en las ponderaciones que permitan reflejar la importancia relativa de cada factor.

En esta sección, partimos de una función de producción conocida que utiliza

³ La eficiencia técnica es defendida también, según otros autores (Pestieau y Tulkens (1990), por ejemplo) no tanto por la dificultad/imposibilidad de obtener precios como por el hecho de que su consecución no entre en conflicto con otros fines del Sector Público, haciéndolo especialmente atractivo en la comparación de unidades productivas que actúan tanto en el ámbito público como en el privado.

⁴ Sobre este tema véase Banker y Morey (1989).

seis inputs, $X_i (i = 1 \dots 6)$ para producir un único output, Y . La cantidad de output de la unidad j viene dada por:

$$Y_j = \beta \prod_{i=1}^m X_{ij}^{\alpha_i} \eta_j \quad [2]$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

donde $\eta_j \in [0, 1]$ es la eficiencia de la unidad productiva j y β y α son parámetros conocidos.

La ecuación [2] representa una forma funcional Cobb-Douglas con rendimientos constantes de escala y la incorporación de un término de ineficiencia técnica, η_j . Alternativamente, podemos expresar esta ecuación de forma aditiva como:

$$y_j = b + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{ij} + E_j \quad [3]$$

donde y_j , b , x_{ij} y E_j son los logaritmos naturales de Y_j , β , X_{ij} y η_j , y $E \in (-\infty, 0)$.

La generación de los datos hace preciso especificar una distribución estadística para las variables y , x_i y E . Concretamente, elegimos distribuciones normales con varianza unitaria para cada variable x_i . Hemos de construir, además, una estructura de covarianzas. En la mayoría de las aplicaciones prácticas del DEA, existe un alto grado de correlación entre los inputs debido a la relación de todos ellos con la escala en la que opera la unidad. Por ello, suponemos una covarianza de 0.8 entre todos los inputs. Por lo que respecta a E , suponemos que tiene una distribución seminormal con varianza unitaria y que no existe correlación entre E y ninguna de las variables x_i .⁵

3.1. Eficiencia, ponderaciones y tamaño de la muestra

Con el fin de estudiar el comportamiento de las estimaciones de eficiencia y de sus respectivas ponderaciones, utilizamos una simulación de Monte Carlo, obteniendo una serie de 480 observaciones de $x_i (i = 1 \dots 6)$ y E . Los valores asociados de y se han calculado mediante la ecuación [3]. Suponiendo que los seis inputs tienen igual importancia en la producción del output, los parámetros α_i serán igual a $1/6$; asimismo, fijamos $\beta = 1$. De esta forma, generamos 480 unidades productivas de las que conocemos las cantidades que consumen de cada uno de los seis inputs, X_{ij} , la cantidad de output que producen, Y_j , y la eficiencia con la que operan, η_j .

En el mundo real, sin embargo, los procesos de producción no son conocidos

⁵ Estos supuestos, sin embargo, no son fundamentales para la obtención de los resultados que se presentan; se introducen exclusivamente con la finalidad de aproximar los datos generados a los utilizados en la práctica.

con esa precisión. De hecho, las técnicas no-paramétricas de evaluación de la eficiencia como el DEA son interesantes precisamente porque se ajustan a la falta de regularidad que tienen los procesos de producción en la práctica, menor que la asumida en las estimaciones econométricas⁶. El propósito de este trabajo, no obstante, es analizar las distorsiones que se producen en las estimaciones de la eficiencia al usar modelos de DEA sin restricciones y examinar como estas distorsiones pueden corregirse, en alguna medida, al introducir en el modelo información sobre la importancia relativa de los distintos factores. Para este propósito, el uso de un proceso de producción simple y conocido es apropiado.

Con el objeto de comprobar la variación de las estimaciones de la eficiencia y de las ponderaciones asignadas a los distintos inputs, dividimos la muestra de 480 unidades en pequeñas submuestras. Concretamente se utilizaron cinco tamaños diferentes de submuestras: 10, 20, 40, 80 y 160 unidades. Así, por ejemplo, cuando se consideraron submuestras de 10 unidades se resolvieron 48 modelos DEA, uno para cada una de las submuestras consideradas. Estas submuestras fueron agrupadas, posteriormente, en submuestras de 20 unidades para las cuales se resolvieron 24 modelos DEA, estimando los ratios de eficiencia y las ponderaciones asignadas a cada factor por cada una de las unidades de todas las submuestras. El proceso fue repetido para submuestras de 40, 80 y 160 unidades. Esta metodología tiene una doble finalidad. Por una parte, nos permite operar con muestras de tamaños similares a los utilizados en las aplicaciones prácticas; por otra, la presentación de medias logra eliminar la mayor parte de las variaciones aleatorias que pueden producirse en muestras de tamaño reducido.

El Cuadro 1 ofrece las medias de los ratios de eficiencia obtenidos para cada uno de los cinco tamaños seleccionados.

CUADRO 1
Estimaciones de eficiencia (DEA) con muestras de diferentes tamaños

Tamaño	Ef. media (DEA)	Sobreestimación	N.º unidades efic.
10	0,7958	58,87 %	228 (47,50 %)
20	0,7438	48,49 %	174 (36,25 %)
40	0,6968	39,12 %	139 (28,96 %)
80	0,6556	30,89 %	113 (23,54 %)
160	0,6234	24,45 %	84 (17,50 %)

Los resultados obtenidos responden a nuestras expectativas. La verdadera eficiencia media de las 480 unidades es 0,5009. La eficiencia estimada por el DEA es mayor que la eficiencia real con la que actúan las unidades de pro-

⁶ En la construcción de las fronteras de producción, las aproximaciones econométricas son paramétricas y, generalmente, estocásticas mientras que las aproximaciones que utilizan la programación matemática son no-paramétricas y, casi siempre, no estocásticas. Estas diferencias esenciales son el origen de las principales ventajas e inconvenientes de cada una de estas técnicas; véase Lovell (1993).

ducción. Además, como señala Nunamaker (1985), al aumentar el tamaño de la muestra se incrementa el grupo de unidades con el que cada una de ellas es comparada y, por tanto, la eficiencia estimada por el DEA para una unidad permanece igual o disminuye. Puede observarse que la sobreestimación media de eficiencia disminuye del 58,87 por 100, cuando el tamaño de las submuestras es igual a 10, al 24,45 por 100 cuando el tamaño considerado es 160.

El Cuadro 2 presenta el porcentaje de unidades que, en media, asignan ponderaciones nulas a cada uno de los factores incluidos en el análisis. Así, por ejemplo, cuando el tamaño considerado es 10, el 56,25 por 100 de las unidades asignan una ponderación prácticamente nula al input 1, el 64,45 por 100 hace lo mismo con el input 2, y así sucesivamente.

CUADRO 2

Número de unidades que asignan ponderaciones nulas a los correspondientes inputs

Tamaño	Input-1	Input-2	Input-3	Input-4	Input-5	Input-6
10	56,25 %	64,45 %	53,75 %	57,41 %	57,70 %	53,94 %
20	47,50 %	54,61 %	47,29 %	47,92 %	52,36 %	47,50 %
40	40,20 %	48,41 %	36,87 %	39,17 %	46,12 %	41,04 %
80	29,37 %	45,21 %	35,00 %	33,75 %	40,40 %	31,45 %
160	22,70 %	33,95 %	31,45 %	27,08 %	31,04 %	28,12 %

El porcentaje de unidades que prescinde de cada uno de los factores en el análisis de su eficiencia disminuye a medida que aumenta el tamaño de la muestra; este resultado también era previsible. Con muestras de 10 unidades es lógico que un porcentaje muy elevado de unidades sean consideradas eficientes ya que el número de inputs es seis. De las 10 unidades incluidas en cada submuestra, aquellas que tengan el ratio output/input más elevado con respecto a cualquier input serán evaluadas automáticamente como eficientes gracias a la asignación de ponderaciones mayores sobre los inputs para los que actúan eficientemente y ponderaciones nulas sobre el resto. En consecuencia, con muestras de tamaño reducido, podemos esperar que el DEA considere una proporción elevada de unidades eficientes y aplique ponderaciones nulas a un número elevado de factores. Sin embargo, el aumento del tamaño de la muestra analizada disminuye la posibilidad de unidades «extremas» con respecto a cualquier input, reduciendo con ello tanto el número de unidades eficientes como la asignación de ponderaciones nulas a los distintos factores.

Del análisis de sensibilidad efectuado sobre las ponderaciones con respecto a la extensión de la muestra, podemos señalar que a medida que ésta aumenta, disminuye la proporción tanto de las unidades eficientes como de las unidades que asignan ponderaciones nulas a cada uno de los inputs y, en consecuencia, una proporción mayor de unidades serán evaluadas sobre la base de un número relativamente pequeño de factores para tamaños reducidos de la muestra.

3.2. Restricciones de las ponderaciones: sus efectos en las estimaciones de eficiencia

Incluso para tamaños considerables de la muestra (160), especialmente desde un punto de vista aplicado, cualquiera que sea el input seleccionado, alrededor del 30 por 100 de las unidades le otorgan una ponderación nula. Este hecho puede ser inaceptable por las razones ya comentadas. En esta sección examinamos qué efectos tiene en el cálculo de la eficiencia la introducción de restricciones en las ponderaciones que garanticen, por una parte, que ningún input es eliminado del análisis de eficiencia de ninguna unidad y, por otra, que la medición de la eficiencia no se basa «excesivamente» en uno o en unos pocos factores.

Con este fin, seleccionamos aleatoriamente una submuestra de 20 unidades de las 480 unidades utilizadas en el análisis anterior. El Cuadro 3 refleja, para cada unidad, el consumo de inputs, X_{ij} , el output producido, Y_j , y la eficiencia real con la que actúan, η_j . En primer lugar, estimamos la eficiencia de cada unidad productiva usando un modelo DEA convencional, sin restricciones sobre las ponderaciones. A continuación introducimos unas restricciones en el sentido indicado anteriormente y comparamos los indicadores de eficiencia obtenidos mediante ambos procedimientos.

CUADRO 3
Inputs, output y eficiencia de las unidades productivas

	Input-1	Input-2	Input-3	Input-4	Input-5	Input-6	Output	Eficiencia
Unidad 1	1,4796	1,29	1,3049	0,4564	2,0208	1,3869	1,1278	0,9297
Unidad 2	1,8199	1,7261	4,5616	1,1458	2,7802	1,7827	1,6475	0,7914
Unidad 3	1,857	0,4073	0,3242	0,4838	0,7735	0,558	0,4131	0,678
Unidad 4	0,2238	0,22	0,7948	0,4752	0,6445	0,4763	0,2597	0,6143
Unidad 5	0,5717	0,9069	0,6339	0,8809	0,8804	0,9215	0,4433	0,5644
Unidad 6	0,839	0,9748	0,9826	0,5736	0,5869	0,8909	0,3987	0,5054
Unidad 7	0,4639	0,4028	0,8232	0,7272	0,2115	0,7272	0,2555	0,5028
Unidad 8	1,0823	2,5249	1,8641	1,7647	1,7589	3,8594	0,9132	0,4602
Unidad 9	1,9242	2,4967	1,0196	1,9687	6,3699	1,1259	0,9014	0,4449
Unidad 10	1,4618	3,0366	2,02	1,9343	1,7659	1,5974	0,8464	0,4426
Unidad 11	0,4721	0,3718	0,4246	0,5714	0,4571	0,2265	0,1727	0,4264
Unidad 12	0,511	0,7313	0,3555	0,9213	0,7204	0,5077	0,233	0,391
Unidad 13	1,5332	0,6546	0,8691	0,5956	0,6034	0,6556	0,2999	0,3904
Unidad 14	1,1854	1,2765	0,7388	1,4739	0,6209	1,4308	0,4124	0,387
Unidad 15	1,1976	1,0989	0,8978	3,708	0,6991	4,5751	0,5541	0,3569
Unidad 16	1,1543	0,6721	1,0372	0,7097	0,7822	1,5905	0,3285	0,3478
Unidad 17	0,8962	1,3315	1,108	0,6446	1,3687	1,1924	0,2567	0,2429
Unidad 18	0,7612	0,3163	0,4301	0,2093	0,8217	0,7213	0,1078	0,2227
Unidad 19	1,8267	0,9678	2,5658	3,0567	1,7939	1,6116	0,3603	0,1948
Unidad 20	1,081	1,7705	1,1032	1,4328	0,823	1,8178	0,149	0,117

Los resultados (ratios de eficiencia y ponderaciones) obtenidos para cada una de las unidades al aplicar el modelo DEA sin restricciones sobre las ponde-

raciones se recogen en el Cuadro 4. En él se observa que la importancia relativa asignada a cada input varía en gran medida de una unidad a otra. Así, por ejemplo, la eficiencia de la unidad 9 es evaluada considerando sólo dos inputs, el input 3 y el input 6, mientras que para otras unidades, como la 6 o la 19, se prescinde en su evaluación de estos dos factores, basándose su análisis en inputs no tenidos en cuenta para la unidad 9.

CUADRO 4
Ponderaciones asignadas los distintos factores y estimación de eficiencia (DEA convencional)*

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	Ef. DEA	Sobrees- timación
Unidad 15	0,0250	0,0272	0,1648	0,0807	0,4097	0,0065	1	180 %
Unidad 2	0,3901	0,1087	0,0411	0,1637	0,0000	0,1052	1	26 %
Unidad 4	0,5357	0,1271	0,0352	0,0588	0,0434	0,0587	1	63 %
Unidad 7	0,0000	0,1001	0,0073	0,1555	0,4543	0,0000	1	99 %
Unidad 1	0,1270	0,1457	0,1440	0,4118	0,0930	0,1355	1	8 %
Unidad 3	0,0285	0,1300	0,4590	0,1093	0,0683	0,0947	1	47 %
Unidad 9	0,0000	0,0000	0,2025	0,0000	0,0000	0,6227	0,9933	123 %
Unidad 8	0,5176	0,0000	0,0750	0,0000	0,1307	0,0000	0,982	113 %
Unidad 5	0,6307	0,0000	0,1492	0,0000	0,0000	0,0000	0,974	73 %
Unidad 6	0,0000	0,0000	0,0000	0,2023	0,5124	0,0000	0,9566	89 %
Unidad 14	0,0964	0,0000	0,1799	0,0000	0,4220	0,0188	0,9519	146 %
Unidad 11	0,0000	0,0000	0,0686	0,0000	0,0000	0,7486	0,8692	104 %
Unidad 13	0,0000	0,0000	0,0431	0,0000	0,4031	0,1854	0,7457	91 %
Unidad 12	0,0892	0,0000	0,7631	0,0000	0,0000	0,0000	0,7353	88 %
Unidad 10	0,3135	0,0000	0,0591	0,0000	0,2904	0,0000	0,7267	64 %
Unidad 16	0,0000	0,3155	0,0316	0,0460	0,3259	0,0000	0,617	77 %
Unidad 19	0,0029	0,6752	0,0000	0,0000	0,1714	0,0000	0,3728	91 %
Unidad 18	0,0000	0,7953	0,0171	0,1721	0,0000	0,0000	0,3653	64 %
Unidad 17	0,5176	0,0000	0,0750	0,0000	0,1307	0,0000	0,3537	46 %
Unidad 20	0,0096	0,0000	0,1799	0,0000	0,4220	0,0188	0,2526	116 %

* Dada la homogeneidad del programa tomamos $U_i = 1$.

Como puede observarse (Cuadro 4) de los 120 valores que toman las ponderaciones de los inputs, 43 son ceros; ello es consecuencia de la forma de evaluación de la propia técnica, mediante la cual, como señalábamos antes, las unidades productivas son analizadas a partir de las ponderaciones más favorables. Esta característica se aprecia examinando los Cuadros 3 y 4. La unidad 9, por ejemplo, actúa de forma muy deficiente respecto al consumo del input 5, ya que el ratio de input 5 consumido por unidad de output es, para dicha unidad, considerablemente más alto que para el resto de las unidades; sin embargo, esta actuación deficiente respecto al input 5 es ocultada por el DEA al evaluar la eficiencia de esta unidad. Lo mismo sucede en el caso de los inputs 1, 2 y 4. Como consecuencia, la eficiencia estimada por el DEA para la unidad 9 (99,3) es superior al doble de su eficiencia real (44,49).

Estos resultados, obtenidos con el DEA convencional, pueden ser mejorados significativamente si introducimos en el modelo restricciones adicionales que reflejen adecuadamente la importancia relativa de cada factor.

Al generar los datos asumidos que todos los inputs tenían la misma importancia en la producción del output ($\alpha_i = 1/6$ para todo i). A nadie se le oculta la dificultad que tiene, debido a exigencias de información, decidir, no sólo sobre la inclusión o no de determinadas variables, sino adicionalmente, sobre la importancia relativa de cada input y output.

Es probable, sin embargo, que el analista, a pesar de no poder determinar exactamente la importancia relativa de cada factor, tenga alguna opinión sobre cuáles son los factores más importantes y cuáles tienen un carácter secundario. En este caso, el establecimiento de ciertas restricciones sobre las ponderaciones aseguraría que los resultados proporcionados por el DEA son consistentes con esos juicios de valor.

Los trabajos realizados hasta ahora sobre la restricción de ponderaciones en el DEA podrían clasificarse, de forma general, en dos grupos⁷. En el primero, donde estarían incluidos los trabajos de Charnes, Cooper, Wei y Huang (1989) y Roll, Cook y Golany (1991), las ponderaciones se establecen de forma absoluta; es decir, para cada factor se fijan unos límites, mínimo y máximo, entre los cuales varían las ponderaciones. En el segundo, en el que destaca el trabajo de Thompson, Langemeier, Lee, Lee y Thrall (1990), la restricción de las ponderaciones son de carácter relativo; es decir, las de cada input dependen de los valores que tomen las ponderaciones para el resto de los factores (idem para los outputs). A nuestro juicio, es este segundo procedimiento el más adecuado al garantizar que las ponderaciones asignadas a los factores más importantes sean superiores.

Volviendo a nuestro ejemplo, si el experto considera que todos los inputs son importantes para producir el output, será inaceptable que la unidad 9 asigne una ponderación nula a cuatro de los seis inputs. Tales resultados pueden evitarse si, al evaluar la eficiencia, introducimos restricciones del tipo: a) ningún output de cualquier unidad puede ser eliminado y b) ningún input tendrá asignada una importancia muy superior a la de los otros inputs.

En este sentido, hemos añadido en nuestro análisis la siguiente restricción: en la evaluación de la eficiencia de cada unidad no se puede atribuir a ningún factor una importancia superior al doble de la asignada a los otros factores. Es decir, incorporamos al modelo una serie de restricciones del tipo:

$$V_i \leq 2 V_j \quad i \neq j \quad i, j = 1 \dots 6$$

⁷ En un tercer grupo estaría el trabajo de Wong y Beasley (1990) con restricciones de carácter absoluto pero sobre inputs y outputs virtuales.

CUADRO 5
Ponderaciones asignadas a los inputs y estimación de eficiencia
(DEA restringido)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	Ef. DEA	Sobrees- timación
Unidad 1	0,21235	0,10618	0,10618	0,10618	0,10618	0,10618	1	8 %
Unidad 2	0,09122	0,09122	0,04561	0,04561	0,09122	0,09122	0,9405	19 %
Unidad 3	0,15464	0,30927	0,30927	0,15464	0,30927	0,30927	0,7896	16 %
Unidad 4	0,61005	0,61005	0,30503	0,30503	0,30503	0,30503	0,7521	22 %
Unidad 5	0,29064	0,14532	0,29064	0,14532	0,29064	0,14532	0,7279	29 %
Unidad 7	0,45106	0,45106	0,22553	0,22553	0,45106	0,22553	0,6504	29 %
Unidad 6	0,184	0,184	0,184	0,184	0,368	0,184	0,6478	28 %
Unidad 8	0,12743	0,06371	0,06371	0,06371	0,12743	0,06371	0,5901	28 %
Unidad 10	0,12018	0,06009	0,06009	0,06009	0,12018	0,12018	0,5784	31 %
Unidad 11	0,31181	0,31181	0,31181	0,31181	0,62362	0,62362	0,5418	27 %
Unidad 9	0,1054	0,0527	0,1054	0,0527	0,0527	0,1054	0,5101	15 %
Unidad 14	0,12367	0,12367	0,24734	0,12367	0,24734	0,12367	0,5094	32 %
Unidad 12	0,34236	0,17118	0,34236	0,17118	0,34236	0,34236	0,4997	28 %
Unidad 13	0,14652	0,29304	0,14652	0,14652	0,29304	0,29304	0,4923	26 %
Unidad 16	0,13513	0,27026	0,13513	0,13513	0,27026	0,13513	0,4428	27 %
Unidad 15	0,12446	0,12446	0,12446	0,06223	0,12446	0,06223	0,4291	20 %
Unidad 17	0,22711	0,11355	0,11355	0,11355	0,22711	0,11355	0,2957	22 %
Unidad 18	0,24961	0,49921	0,49921	0,49921	0,49921	0,49921	0,2513	13 %
Unidad 19	0,11097	0,11097	0,05549	0,05549	0,11097	0,11097	0,2502	28 %
Unidad 20	0,18332	0,09166	0,18332	0,09166	0,18332	0,09166	0,1543	32 %

Los nuevos resultados obtenidos con el DEA se recogen en el Cuadro 5, del que destacamos los siguientes aspectos:

1. Con la nueva serie de restricciones, cada unidad selecciona únicamente dos valores —uno el doble que el otro— para las ponderaciones que se aplican sobre los seis inputs. El mayor se aplica a aquellos inputs para los que la unidad actúa relativamente bien y el menor se asigna a aquellos inputs en los que la unidad tiene un comportamiento relativamente peor.

2. Las estimaciones de eficiencia que proporciona el modelo DEA con restricciones sobre las ponderaciones están mucho más próximas a la eficiencia real de las distintas unidades productivas que las estimaciones obtenidas con el modelo convencional. El coeficiente de correlación entre la eficiencia real y la estimada es 0,7739 y 0,9879, en uno y otro caso.

3. En el Cuadro 6 se muestra el ranking de eficiencia de las unidades en orden decreciente. El obtenido a partir del DEA con restricciones sobre las ponderaciones está mucho más cercano al ranking de eficiencia real que el que proporciona el DEA convencional. En el primer caso, coinciden en los cinco primeros puestos, y sólo se encuentran pequeñas divergencias entre ambos. El segundo, sin embargo, difiere notablemente del real. Estos resultados son lógicos si tenemos en cuenta que el DEA con restricciones sobre

las ponderaciones no prescinde de ningún factor a la hora de evaluar la eficiencia de las distintas unidades. Resulta especialmente ilustrativo el caso de la unidad 15, que es considerada eficiente por el DEA tradicional.

CUADRO 6
Rankings de eficiencia

Ef. Real	DEA Restringido	DEA convencional
Unidad 1	Unidad 1	Unidad 1 Ef = 1
Unidad 2	Unidad 2	Unidad 2 Ef = 1
Unidad 3	Unidad 3	Unidad 3 Ef = 1
Unidad 4	Unidad 4	Unidad 4 Ef = 1
Unidad 5	Unidad 5	Unidad 7 Ef = 1
Unidad 6	Unidad 7	Unidad 15 Ef = 1
Unidad 7	Unidad 6	Unidad 9
Unidad 8	Unidad 8	Unidad 8
Unidad 9	Unidad 10	Unidad 5
Unidad 10	Unidad 11	Unidad 6
Unidad 11	Unidad 9	Unidad 14
Unidad 12	Unidad 14	Unidad 11
Unidad 13	Unidad 12	Unidad 13
Unidad 14	Unidad 13	Unidad 12
Unidad 15	Unidad 16	Unidad 10
Unidad 16	Unidad 15	Unidad 16
Unidad 17	Unidad 17	Unidad 19
Unidad 18	Unidad 18	Unidad 18
Unidad 19	Unidad 19	Unidad 17
Unidad 20	Unidad 20	Unidad 20

4. Por último, la introducción de las restricciones mejora el poder discriminatorio del DEA. Como señalan Ganley y Cubbin (1992), cuando comparamos la eficiencia con la que se comporta un conjunto de unidades productivas mediante el DEA obtenemos dos grandes subconjuntos. El primero, compuesto por aquellas unidades que actúan eficientemente; el segundo, dominado por el primero, formado por las unidades relativamente ineficientes. La técnica, sin embargo, no permite discriminar entre las unidades incluidas en el primer subconjunto, ya que todas obtienen el mismo indicador de eficiencia. Para un número dado de unidades, cuanto mayor sea el número de inputs y outputs incluidos en el análisis mayor será el número de unidades evaluadas como eficientes y menor será, por tanto, el poder discriminatorio de la técnica.

En nuestro ejemplo, el número de unidades de producción analizadas es reducido en relación al número de factores incluidos en el análisis⁸. Aplicando el DEA convencional, una proporción muy elevada de unidades (un 30 por 100) son evaluadas como eficientes. Cuando introducimos las res-

⁸ Situación muy común en los estudios empíricos que se han llevado a cabo. Véase, por ejemplo, Button y Weyman-Jones (1992).

tricciones adicionales, sólo una de estas seis unidades –la unidad 1– es considerada eficiente. En consecuencia, la introducción de restricciones que reflejen la importancia relativa de cada factor contribuye a mejorar el poder discriminatorio del DEA, separando a las unidades que son eficientes de aquellas que son evaluadas como eficientes a partir de un conjunto de ponderaciones que no son consistentes con la importancia relativa de cada factor.

Conclusiones

Como señalan Levitt y Joyce (1987), el DEA es exclusivamente una técnica matemática para medir, a partir de una suma ponderada de outputs con respecto a una suma ponderada de inputs, la eficiencia de un conjunto de unidades productivas. Dicha técnica asume una relación causal entre inputs y outputs pero no realiza ningún test sobre la existencia de tal relación. Al aplicar este procedimiento pueden aparecer dificultades si un input es relevante en la producción de los outputs de un conjunto de unidades pero su importancia relativa es menor que la del resto de los inputs considerados. Existirá entonces un trade-off entre la información que añade su inclusión y las distorsiones que puedan originarse debido a la flexibilidad del DEA. La incorporación de información adicional sobre la importancia relativa de los distintos factores a través de restricciones en las ponderaciones del tipo de las examinadas en este trabajo, suponen, en sentido económico, una aproximación a un concepto más amplio de eficiencia y reducen este trade-off, mejorando notablemente los resultados suministrados por la técnica.

Aunque la introducción de restricciones sobre las ponderaciones implica siempre la formulación de juicios de valor, la aplicación del DEA convencional no está exenta de ellos. La exclusión de algunos de factores en la evaluación de la eficiencia de las unidades productivas puede resultar menos aceptable y no deja de ser sorprendente después de haber seleccionado los factores que se consideran relevantes.

Utilizando un proceso productivo suficientemente conocido (forma funcional Cobb-Douglas), comprobamos que aplicando la técnica DEA la proporción de unidades que asignan ponderaciones nulas a cualquier factor productivo disminuye al aumentar el tamaño de la muestra. Sin embargo, incluso con muestras de gran tamaño –160 unidades productivas es un tamaño muestral mayor que el utilizado en la mayoría de las aplicaciones del DEA– la proporción de unidades que prescinden de algún factor es todavía elevada. Comprobamos también que los resultados obtenidos con el DEA convencional mejoran sustancialmente al introducir restricciones adicionales que reflejen la importancia relativa de los inputs. Las estimaciones proporcionadas con el DEA con ponderaciones restringidas se encuentran mucho más próximas a las eficiencias reales, elevándose el coeficiente de correlación desde un 77,39 por 100 a un 98,79 por 100 en este último caso.

El trabajo realizado constituye una primera aproximación al problema de la limitación de la flexibilidad de las ponderaciones en el DEA. Se requiere

investigación adicional utilizando muestras mayores, analizando cómo diferentes tipos de restricciones pueden afectar a los resultados proporcionados por la técnica y extendiendo el análisis a formulaciones más ambiciosas. No obstante, los resultados ofrecidos sugieren que la introducción de restricciones sobre las ponderaciones consistentes con la importancia de los factores incluidos en el análisis, mejora significativamente los resultados proporcionados por el DEA.

Referencias

- Banker, R. D.; Charnes, A. y Cooper, W. W. (1984): «Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis», *Management Science* 30, pp. 1078-1092.
- Banker, R. D. y Morey, R. C. (1989): «Incorporating Value Judgements in Efficiency Analysis», *Research in Governmental and Nonprofit Accounting* 5, pp. 245-267.
- Beasley, J. E. (1990): «Comparing University Departments», *Omega. International Journal of Management Science* 18, pp. 171-183.
- Boussofiane, A.; Dysson, R. G. y Thanassoulis, E. (1991): «Applied Data Envelopment Analysis», *European Journal of Operational Research* 52, pp. 1-15.
- Button, K. J. y Weyman-Jones, T. G. (1992): «Ownership Structure, Institutional Organization and Measured X-Efficiency», *American Economic Review* 82, pp. 439-445.
- Charnes, A.; Cooper, W. W. y Rhodes, E. (1978): «Measuring the Efficiency of Decision Making Units», *European Journal of Operational Research* 2, pp. 429-444.
- Charnes, A.; Cooper, W. W.; Wei, Q. L. y Huang, Z. M. (1989): «Cone Ratio Data Envelopment Analysis and Multiobjective Programming», *International Journal of Systems Science* 20, pp. 1099-1118.
- Cook, W.; Roll, Y. y Kazakov, A. (1990): «A DEA Model for Measuring the Relative Efficiency of Highway Maintenance Patrols», *INFOR*, 28, pp. 113-124.
- Dyson, R. G. y Thanassoulis, E. (1988): «Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis», *Journal of Operational Research Society* 39, pp. 563-576.
- Farrell, M. J. (1957): «The Measurement of Productive Efficiency», *Journal of the Royal Statistical Society Serie A* 3, pp. 253-290.
- Ganley, J. A. y Cubbin, J. S. (1992): *Public Sector Efficiency Measurement - Applications of Data Envelopment Analysis*, North Holland, Amsterdam.
- Kornbluth, J. S. H. (1991): «Analysing Policy Effectiveness Using Cone Restricted Data Envelopment Analysis», *Journal of Operational Research Society* 42, pp. 1097-1104.
- Levitt, M. S. y Joyce, M. A. S. (1987): *The Growth and Efficiency of Public Spending*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lewin, A. Y. y Morey, R. C. (1981): «Measuring the Relative Efficiency and Output Potential of Public Sector Organizations: An Application of Data Envelopment Analysis», *International Journal of Policy Analysis and Information Systems* 5, pp. 267-285.
- Lovell, C. A. K. (1993): «Production Frontiers and Productive Efficiency», en *The Measurement of Productive Efficiency - Techniques and Applications*, Fried, H. O., Lovell, C. A. K. y Schmidt, P. (Eds.), Oxford University Press.

- Nunamaker, T. R. (1985): «Using Data Envelopment Analysis to Measure the Efficiency of Non-Profit Organizations: A Critical Evaluation», *Managerial and Decision Economics* 6, pp. 50-58.
- Pestieau, P. y Tulkens, H. (1990): «Assessing the Performance of Public Sector Activities: Some Recent Evidence from the Productive Efficiency Viewpoint». CORE, *Discussion Paper* 9060, University Catholique de Louvain.
- Roll, Y.; Cook, W. D. y Golany, B. (1991): «Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis», *IEE Transactions* 23, pp. 2-9.
- Roll, Y. y Golany, B. (1993): «Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA», *Omega. International Journal of Management Science* 21, pp. 99-109.
- Seiford, L. M. (1990): «A Bibliography of Data Envelopment Analysis (1978-90): Version 5.0», Technical Report. Department of Industrial Engineering, University of Massachusetts, Amherst.
- Sherman, H. D. (1984): «Data Envelopment Analysis as a New Managerial Audit Methodology - Test and Evaluation», *Auditing* 4, pp. 35-53.
- Smith, P. (1993): «Misspecification Bias in Data Envelopment Analysis», *Discussion Paper* 93/15, Department of Economics, University of York, Mayo 1993.
- Thompson, R. G.; Langemeier, L. N.; Lee, C.; Lee, E. y Thrall, R. M. (1990): «The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming», *Journal of Econometrics* 46, pp. 93-108.
- Thompson, R. G.; Singleton, J. R.; Thrall, R. M. y Smith, D. A. (1986): «Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Lab in Texas», *Interface* 16, pp. 35-49.
- Wong, Y. H. B. y Beasley, J. E. (1990): «Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis», *Journal of the Operational Research Society* 41, pp. 829-835.

Abstract

Data Envelopment Analysis is a mathematical approach to assess the efficiency of a set of Decision Making Units. The approach estimates the efficiency of the different units by attaching a weight to each factor included in the analysis. Total flexibility of weights may lead to inconsistent results in the sense that they may not reflect the relative importance of each factor. In this paper we show how restricting weights considerably improves the results provided by DEA.

Recepción del original, diciembre de 1993

Versión final, mayo de 1994