

MODELIZACIÓN DE LAS EXPECTATIVAS Y ESTRATEGIAS DE INVERSIÓN EN MERCADOS DE OPCIONES

BEGOÑA FONT BELAIRE

Universitat de València

Este artículo trata sobre la inversión en mercados de opciones y desarrolla un procedimiento inferencial Bayesiano para evaluar el precio de opciones europeas que permite combinar formalmente la información de las series históricas de precios del subyacente y opciones con las expectativas del inversor sobre la evolución en tendencia y volatilidad del subyacente. Se propone también un problema dinámico de programación lineal entera, basado en las estimaciones Bayesianas obtenidas, para determinar el número óptimo de opciones a comprar/vender que maximiza el beneficio estimado de la cartera. Esta metodología se aplica en el Mercado Español de Futuros y Opciones (MEFF).

Palabras clave: Carteras especulativas óptimas, inferencia Bayesiana, opciones europeas.

(JEL C11, G11, G13)

1. Introducción

Los mercados de opciones son muy populares entre los inversores porque son líquidos, alcanzándose rápidamente el precio de cruce por la aceptación de la fórmula de Black-Scholes, son muy flexibles, por el gran número de contratos negociados que permiten tomar posiciones combinadas sobre la evolución futura del subyacente para varios vencimientos, y permiten tomar posiciones con un gran apalancamiento financiero. Pero estas características se pueden volver en contra del inversor si éste no dispone de una buena herramienta para estimar el precio de las opciones de acuerdo con sus expectativas sobre la evolución futura del subyacente, y así poder comparar este precio con el

La autora desea agradecer los comentarios y sugerencias de la Prof. Isabel Abíznano en la presentación de una versión de este trabajo en el XV Foro de Finanzas (Palma de Mallorca, 15-16 noviembre de 2007) y de los dos evaluadores de la revista. Una versión de este trabajo ha sido publicada previamente como DT360 de la Colección de Documentos de Trabajo de la Fundación de Cajas de Ahorros (FUNCAS).

precio teórico que deriva, por ejemplo, de la aplicación de la fórmula de Black-Scholes. En este artículo estudiaremos cómo incorporar las expectativas de un inversor sobre la evolución en tendencia y volatilidad del subyacente en un modelo de valoración de opciones; cómo traducirlas a precios subjetivos para opciones europeas; y finalmente, cómo construir una cartera óptima inicial en opciones y cómo revisarla en el período de mantenimiento de la inversión, incorporando la información que proporciona los mercados al contado y de derivados y las expectativas del propio inversor.

Estos aspectos de valoración subjetiva y determinación de la cartera óptima en opciones de acuerdo con las expectativas del inversor no han recibido mucha atención de la literatura previa. Aunque podemos citar varios trabajos en los que se estudia el problema de obtener la cartera de cobertura e inversión óptima con opciones (p.e. Rendleman (1981), Wolf (1987), Morard y Naciri (1990), Ladd y Hanson (1991) y Bullock y Hayes (1992)), poco o nada se dice sobre las motivaciones del inversor y sus expectativas sobre la evolución del mercado, y la cartera óptima se elige entre un tipo específico de estrategias (básicamente de cobertura en commodities). Destaquemos dos excepciones: Korn y Wilmott (1998) y Font (2004). El enfoque de estos dos trabajos es muy distinto, Korn y Wilmott (1998) proponen determinar el precio subjetivo de la opción resolviendo un problema de inversión en tiempo continuo en el que se imponen restricciones sobre la evolución del precio de la cartera de valoración (opción, subyacente y bono) que reflejan el propósito del inversor: pura especulación, cobertura total, cobertura parcial, especulación con posición de cierre y *estrategia media-varianza*. En su trabajo se consideran dos situaciones: una más sencilla en la que el inversor es forzado a expresar sus expectativas fijando un valor constante para los parámetros media y volatilidad, y uno más complejo en el que se le permite incorporar cambios en los precios fijando dos valores distintos para el parámetro media y para la intensidad de un proceso Poisson que modeliza la frecuencia de cambio en la tendencia. Como solución alternativa, Font (2004) propone un procedimiento inferencial Bayesiano para modelizar la evolución del activo subyacente de acuerdo con las expectativas del inversor sobre la evolución en media y volatilidad del mismo, estima el precio subjetivo de la opción a partir de la distribución predictiva del precio del subyacente y propone un problema de optimización para obtener la estrategia de inversión óptima atendiendo a las expectativas del inversor. En ambos trabajos el modelo teórico tiene un papel fundamental,

pero el artículo de Font (2004) es más pragmático al desarrollar un procedimiento Bayesiano que permite obtener una estimación del precio de las opciones, que incorpora la expectativa a priori del inversor y la información histórica de los precios del subyacente; y un programa de optimización que, apoyándose en esa estimación, permite obtener una cartera óptima que refleja las expectativas del inversor. La aplicación del paradigma Bayesiano en economía, que también seguiremos en este artículo no es nueva (p.e. Zellner (1990) y Greenberg (2008)) y proporciona una metodología rigurosa que permite combinar la información muestral con las valoraciones subjetivas del agente; algunas aportaciones recientes en valoración de opciones son: Jacquier y Jarrow (2000), Forbes, Martin y Wright (2007), Martin, Forbes y Martin (2005) y Eraker (2004).

Este artículo propone un procedimiento inferencial Bayesiano en el que a partir de un modelo de valoración de opciones e incorporando la información histórica de los dos mercados, se obtienen estimaciones del precio neutral o de referencia al que el inversor va a poder adquirir las opciones, y del precio subjetivo de las opciones y subyacente que incorpora sus expectativas sobre la evolución en tendencia y volatilidad del subyacente. A partir de estos resultados se plantea un problema de optimización dinámico en el que se obtiene una cartera óptima inicial de compra/venta de opciones con distintos vencimientos que se revisa periódicamente incorporando junto con las expectativas del inversor la nueva información muestral. El procedimiento se aplica de forma ilustrativa en el mercado oficial español de futuros y opciones de renta variable (MEFF-RV) para opciones europeas sobre el índice IBEX-35. La contribución de este artículo es fundamental en varios aspectos:

1. Se proporcionan las distribuciones finales de la volatilidad al cuadrado, y por tanto estimaciones de la volatilidad, en los contextos de neutralidad al riesgo y según las expectativas del inversor combinando formalmente, a través de un procedimiento Bayesiano, la información *pasada* sobre volatilidad contenida en la serie histórica del subyacente con la información *futura* contenida en las series (históricas) de los precios de las opciones y las expectativas generales de todos los inversores en el contexto neutral, y las expectativas específicas de cada inversor en el contexto alternativo. El uso de estas distribuciones y estimadores trasciende su empleo intermedio en la deducción de las distribuciones predictivas del artículo, ya que las estimaciones de los precios de

los contratos de opciones aplicando cualquier modelo o procedimiento numérico de valoración dependen en gran medida de una buena estimación del parámetro de volatilidad.

2. Se propone un modelo de valoración de opciones, y por lo tanto, un modelo para valorar los precios de las opciones en el propio mercado de derivados, que incorpora en el precio de la opción (al aplicarse un procedimiento inferencial Bayesiano) los posibles errores asociados a la predicción del precio teórico de la opción en el mercado al contado, y la variabilidad en el precio debida a las características específicas del mercado de derivados: asincronía entre los precios de los dos mercados, costes de transacción y otras fricciones del mercado.
3. Se obtienen las distribuciones predictivas, y por lo tanto estimaciones para distintas funciones de pérdida que pueden reflejar el distinto coste de equivocarse sobrevalorando o infravalorando el precio, del precio neutral o de referencia de la opción que aproximaría el precio de cruce al que podremos adquirir la opción en el mercado de derivados, y de los precios subjetivos de la opción y precio futuro del subyacente que combinan la información histórica de los dos mercados con nuestras expectativas como inversor sobre la evolución de la tendencia y volatilidad de los precios del subyacente.
4. Las distribuciones predictivas obtenidas permiten simular la distribución de cualquier cartera de opciones y por tanto comparar entre varias carteras aplicando algunas propuestas actuales de la literatura (p.e. Morard y Naciri (1990) y Board, Sutcliffe y Patrinos (2000)) como son: el criterio media-varianza, media-semivarianza, media-asimetría, otras funciones de utilidad, dominancia estocástica, . . . ; pero con la mejora conceptual de que con la aproximación propuesta en este artículo se están reflejando las expectativas individuales de los inversores.
5. Se propone un problema de programación dinámica lineal entero que permite la obtención de la cartera inicial óptima y su actualización en el tiempo incorporando la información histórica de los mercados al contado y de derivados y las expectativas del inversor sobre la evolución del subyacente.

6. Los resultados obtenidos en el artículo permiten resolver dos simplificaciones importantes del procedimiento desarrollado por Font (2004): el conocimiento a priori de los precios de mercado, que proponemos estimar a partir de los precios neutrales o de referencia de las opciones, y la aplicación del mecanismo de garantías del mercado para controlar el riesgo de la estrategia, que proponemos sustituir por la exigencia de resultados positivos a vencimiento para cualquier valor del subyacente comprendido en un intervalo de confianza predictivo que refleje el nivel de aversión al riesgo del inversor.
7. La aplicación en el mercado de futuros y opciones español confirma las características distribucionales descritas en la literatura para los precios de opciones y carteras, y proporciona carteras óptimas en opciones que se van ajustando progresivamente a la situación real del mercado y obtienen resultados totales netos a vencimiento para seis de las nueve combinaciones de expectativas en tendencia y volatilidad consideradas.

Este artículo se organiza en cinco secciones y un apéndice. En la Sección 2 se introduce el modelo de valoración de opciones Bayesiano, y se obtienen las distribuciones predictivas de los precios teóricos, de referencia y subjetivos de las opciones y del precio subjetivo del subyacente. En la Sección 3 se plantea un problema de programación lineal entera dinámico para obtener una cartera de opciones óptima. En la Sección 4 se ilustra la metodología propuesta mediante la obtención de las carteras óptimas en opciones sobre el índice IBEX-35 para nueve combinaciones de expectativas en tendencia y volatilidad. Y finaliza el trabajo con la Sección 5 dedicada a las conclusiones y un apéndice en el que se deducen las distribuciones finales y predictivas.

2. Valoración subjetiva de opciones: modelo Bayesiano de valoración de opciones y distribuciones predictivas

Una opción es un derecho a comprar (opción de compra) o vender (opción de venta) un activo (subyacente) a un precio estipulado (precio de ejercicio) en una fecha determinada. Por adquirir este derecho el comprador de una opción paga una cantidad (prima o simplemente precio) al vendedor. En este artículo nos centraremos para simplificar la exposición en opciones europeas, que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento. Formalmente, si consideramos la información

disponible hasta el instante de tiempo t , el precio teórico en t de una opción de compra sobre un subyacente que no reparte dividendos viene dado (p.e. Hull (2006), pp. 293-7) por:

$$q_t = e^{-r \cdot (T-t)} E_t[\max(S_T - K, 0)] \quad [1]$$

donde r es el tipo de interés libre de riesgo que asumimos conocido, $E_t[\cdot]$ es la esperanza condicional basada en la información en el instante t respecto a la distribución de probabilidad neutral al riesgo, T es la fecha de vencimiento, K es el precio de ejercicio y S_T es el precio del subyacente en T .

Por otra parte, si aceptamos el modelo de Black y Scholes (1973) y asumimos, en un mundo neutral al riesgo, que los logaritmos de los precios se distribuyen según un paseo aleatorio normal:

$$\log S_T - \log S_t \sim N \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right] \quad [2]$$

donde σ es la volatilidad de los rendimientos del subyacente. Y desde una perspectiva Bayesiana, para no introducir información subjetiva en el modelo, la distribución no informativa habitual sobre la varianza (σ^2):

$$p(\sigma^2) \propto 1/\sigma^2 \quad [3]$$

A partir de [2] y [3] y observados los precios S_i , $i = 0, 1, 2, \dots, t$, se obtiene (véanse detalles en el apéndice) la siguiente distribución predictiva¹ para el precio (teórico) del subyacente en T dada la información disponible en t :

$$\log S_t / \sqrt{T-t} \mid S_0, S_1, \dots, S_t \sim GH[\lambda_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t, \mu_t] \quad [4]$$

¹Si $x \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, $\alpha > 0$, $0 \leq |\beta| \leq a$, $\mu, \lambda \in R$, $\delta > 0$ con $GH(\cdot)$ la función de distribución hiperbólica generalizada entonces $x \in (-\infty, \infty)$, $f(x|\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \{[\alpha^2 - \beta^2]^{\lambda/2} / [\sqrt{2\pi} \cdot \alpha^{\lambda-1/2} \cdot \delta^\lambda K_\lambda(\delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2})]\} [\delta^2 + (x - \mu)^2]^{(\lambda-1/2)/2} \exp(\beta(x - \mu)) K_{\lambda-1/2}(\alpha(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{1/2})$ con $K_v(\cdot)$ la función modificada de Bessel de tercera clase con índice v , existen todos los momentos y los primeros momentos son $(\zeta = \delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}) : E(x) = \mu + (\beta\delta^2/\zeta)[K_{\lambda+1}(\zeta)/K_\lambda(\zeta)]$ y $V(x) = \delta^2[K_{\lambda+1}(\zeta)/(\zeta K_\lambda(\zeta)) + (\beta\delta^2/\zeta)\{K_{\lambda+2}(\zeta)/K_\lambda(\zeta) - (K_{\lambda+1}(\zeta)/(\zeta K_\lambda(\zeta)))^2\}]$. Citemos como referencias básicas acerca de las propiedades de esta distribución y su simulación a Barndorff-Nielsen (1977) y Atkinson (1982) respectivamente.

donde:

$$\begin{aligned}
 \lambda_t &= -t/2 & \delta_t &= \sqrt{\chi_t} \\
 \chi_t &= (t-1) S_{Rs}^2 + t (\bar{R}_s - r)^2 & \beta_t &= -(T-t) / 2\sqrt{T-t} \\
 \Psi_t &= t / 4 & \mu_t &= [r(T-t) + \log S_t] / \sqrt{T-t} \\
 \alpha_t &= \sqrt{\Psi_t + \beta_t^2}
 \end{aligned} \tag{5}$$

con $R_i = \log S_i - \log S_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, t$, y \bar{R}_s y s_{Rs}^2 la media y varianza muestral estándar respectivamente de la muestra $s = \{R_i\}_{i=1}^t$. Finalmente, a partir de esta distribución predictiva obtenemos por simulación la distribución predictiva de la variable $\max(S_T - K, 0) | S_0, S_1, \dots, S_t$ y estimamos en t , de acuerdo con la ecuación [1], los precios teóricos de la opción², q_t , con precio de ejercicio K y vencimiento T a partir de la media actualizada al tipo de interés libre de riesgo de las simulaciones.

2.1 Modelo de valoración de opciones

Asumiendo que los precios teóricos estimados a partir de la distribución predictiva [4] son una representación insesgada del proceso estocástico real de generación del precio y denotando por C_{ijt} al precio en t de la opción de compra con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según moneyness en t ($m_i = S_t/K_i$) y/o plazo vencimiento según la información disponible en t , podemos especificar el siguiente modelo de valoración de opciones (p.e. Jacquier y Jarrow (2000), Forbes, Martin y Wright (2007) y Martin, Forbes y Martin (2005)):

$$\begin{aligned}
 f(C_{ijt}) &= \beta_0 + \beta_1 f(q_{ijt}) + u_{ijt} \\
 u_{ijt} &\overset{ind}{\sim} N(0, d_0^j \sigma^2)
 \end{aligned} \tag{6}$$

donde $f(\cdot)$ es una función real creciente (p.e. $f(C_{ijt}) = C_{ijt}, \log C_{ijt}$ o $\log(C_{ijt})/\sqrt{T_i - t}$), σ es la volatilidad del mercado a contado, $d_0^j > 0$ es

²En este artículo, las expresiones del estimador en t de los precios teóricos, neutrales y subjetivos de una opción se basan en la información disponible muestral hasta el instante t , en el caso de los primeros los precios observados del subyacente hasta el propio instante t y en los segundos y terceros en estos precios y las primas de las opciones de compra observadas hasta $t - 1$. A nivel práctico, es obvio que para estimar el precio de una opción para un instante t no disponemos del precio del subyacente que se cotizará simultáneamente en ese instante; pero si disponemos de un precio del subyacente inmediatamente anterior a ese instante, a este precio del subyacente es al que nos referimos por S_t .

un parámetro inicial positivo que depende de la clasificación j según *moneyness* y vencimiento, y la expresión *ind* indica que los errores se asumen independientes. La hipótesis de heterocedasticidad en los errores dependiendo del ratio de *moneyness* y tiempo hasta vencimiento de la opción puede justificarse por el uso práctico en valoración de opciones de las superficies de volatilidad, en las que se analiza la información empírica del contrato que deriva de las sonrisas y muecas de la volatilidad implícita en función del ratio de *moneyness* y el tiempo hasta vencimiento (p.e. Hull (2006), pp. 376-83).

Consideremos, además, desde la aproximación Bayesiana seguida en este artículo la distribución no informativa habitual sobre el vector (β_0, β_1) :

$$p(\beta_0, \beta_1 | \sigma^2) \propto 1 \quad [7]$$

La presencia de los residuos recoge los errores debidos al modelo y también al error de mercado, esto es, diferencias entre los precios observados y los teóricos atribuibles a factores relacionados con la negociación: asincronías en la negociación, costes de transacción, . . . Especificaciones más generales de [6] son obviamente posibles aunque los beneficios en la estimación no son tan claros (p.e. Eraker (2004) y Martin, Forbes y Martin (2005)). Además, estrictamente hablando, en ausencia de oportunidades de arbitraje, la distribución de u_{ijt} debería estar acotada inferiormente³ por $f(\max(0, S_t - e^{-r(T_i-t)} K_i))$ (p.e. Hull (2006), pp. 210-1). En este artículo ignoraremos esta truncación que impide obtener distribuciones predictivas cerradas complicando el proceso inferencial Bayesiano y tiene, en cambio, un impacto mínimo en las estimaciones.

La elección de la función $f(\cdot)$ junto con la clasificación j según *moneyness* y/o plazo de vencimiento recoge la distinta variabilidad de los precios de opciones según el nivel de *moneyness* y el plazo hasta vencimiento. De acuerdo con el doble papel que va a desempeñar este modelo de opciones, para estimar precios (neutrales) de referencia y subjetivos de los contratos sobre opciones que proporcionen al inversor información sobre el precio al que puede comprar/vender la opción en el mercado derivado y lo que vale dicha opción de acuerdo con sus expectativas sobre la evolución del subyacente respectivamente; el parámetro d_0^j se debería fijar a partir de la información histórica de

³Nótese que para las funciones $f(C_{ijt}) = \log C_{ijt}$ y $\log(C_{ijt})\sqrt{T_i-t}$ se cumple de forma automática la cota de positividad.

rendimientos y opciones⁴ en el primer caso y podría ser fijado arbitrariamente por el inversor en el segundo.

En relación a las opciones de venta considerando cierto el modelo de opciones [6]-[7], asumiendo ausencia de arbitraje y denotando por P_{ijt} al precio de la opción de venta con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según *moneyness* en t (de la correspondiente opción de compra) y/o plazo vencimiento según la información disponible en t , se cumple la relación de paridad *put-call* (p.e. Hull (2006), pp. 212-5):

$$P_{ijt} = C_{ijt} + K_i e^{-r(T_i-t)} - S_t \quad [8]$$

En este trabajo usaremos esta relación para obtener los precios neutrales y subjetivos actuales (en el propio instante de valoración) de las opciones de venta a partir de la estimación de la correspondiente opción de compra.

2.2 Modelización de las expectativas del inversor

Incorporemos las expectativas de nuestros inversores sobre la evolución en tendencia y volatilidad del subyacente, basándonos en las hipótesis que subyacen en el modelo de valoración de Black y Scholes (1973), en nuestro modelo de valoración de opciones.

Volvamos de nuevo a la ecuación [2] pero sin asumir la hipótesis de valoración neutral al riesgo, esto es, sustituyendo r por μ ; los dos parámetros clave que describen el comportamiento del precio del activo y sobre los que el agente debe expresar sus expectativas son: la tasa de rentabilidad esperada del activo en compuesta continua⁵, $\eta = \mu - \sigma^2/2$, y el cuadrado de la volatilidad de los rendimientos, σ^2 . Y consideremos ahora, desde una perspectiva Bayesiana, que el agente puede modelizar de forma adecuada sus expectativas *a priori* sobre tendencia, η , y sobre volatilidad, σ^2 , fijando $m_0, c_0 > 0, a_0 > 0$ y $b_0 > 0$ en las siguientes distribuciones iniciales:

$$\begin{aligned} \eta \mid \sigma^2 &\sim N(m_0, c_0 \sigma^2) \\ \sigma^2 &\sim Ga^{-1}(a_0, b_0) \end{aligned} \quad [9]$$

⁴ Obsérvese que: $V[f(C_{ijt})]/V[R_t] = d_0^j$.

⁵ Si denotamos por τ a la tasa de rentabilidad compuesta continua del subyacente, esto es, $S_j = S_i \exp[\tau(j-i)]$, $j > i$, a partir de [2] sustituyendo r por μ se tiene que $\tau \sim N(\eta, \sigma^2/(j-i))$ (p.e. Hull (2006), pp. 283-4).

Destaquemos que las distribuciones⁶ iniciales [9] además de facilitar el proceso inferencial Bayesiano (nótese que [6], [7] y la propia distribución inicial de $\eta|\sigma^2$ se definen en función de un mismo parámetro de varianza σ^2) permiten introducir las expectativas del agente de forma fácil y flexible sobre los dos aspectos clave de las estrategias de inversión con opciones: la tendencia del subyacente, haciendo referencia a la dirección del cambio, y la volatilidad del mismo, haciendo referencia a la intensidad del cambio.

Asumiendo el modelo definido por las ecuaciones [2]-[9] sustituyendo r por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$ y [6]-[7], observados los precios de los contratos de opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$, $\{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$, y los precios del subyacente en el intervalo $[0, t']$, S_i , $i=0,1,2,\dots, t'$ y estimados los precios teóricos, $\{q_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq t < t'}$, de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$ dados los precios de subyacente en el intervalo $[0, t']$ (véanse ecuaciones [1] y [4]⁷); se obtiene (véanse detalles en el apéndice), la distribución final de los parámetros β_0, β_1 y σ^2 del modelo de valoración de opciones [6]-[7] que incorpora las expectativas del inversor:

$$\begin{aligned} \beta_0, \beta_1 \mid S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2 &\sim N(\widehat{\beta}, B\sigma^2) \\ \sigma^2 \mid S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'} &\sim Ga^{-1}(a_{t'}, b_{t'}) \end{aligned} \quad [10]$$

⁶Recordemos que:

- Si $\eta \sim N(m_0, c_0\sigma^2)$ entonces $\eta \in (-\infty, \infty)$, $f(\eta|m_0, c_0\sigma^2) = (2\pi c_0\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp[-(\eta - m_0)^2/2c_0\sigma^2]$ y los primeros momentos (a partir de ellos podemos especificar m_0 y $c_0 > 0$) vienen dados por : $E(\eta) = m_0, V(\eta) = c_0\sigma^2$.
- Si $\sigma^2 \sim Ga^{-1}(a_0, b_0)$ entonces $\sigma^2 \in (0, \infty)$, $f(\sigma^2|a_0, b_0) = [b_0^{a_0}/\Gamma(a_0)](\sigma^2)^{-(a_0+1)} \exp[-b_0/(\sigma^2)]$ y los primeros momentos vienen dados por: $E(\sigma^2) = b_0/(a_0 - 1)$, si $a_0 > 1$ y $V(\sigma^2) = b_0^2/[(a_0 - 1)^2(a_0 - 2)]$, si $a_0 > 2$.

⁷Conviene notar que la estimación de los precios teóricos $\{q_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq t < t'}$ de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$ puede realizarse acumulando la información muestral sobre el subyacente hasta t (en una interpretación literal de la ecuación [4]) o bien a partir de la ventana muestral de tamaño constante t definida por los precios del subyacente en el intervalo $[\tau - t, \tau]$. En la aplicación presentada en este artículo se ha optado por la segunda alternativa al considerar que de este modo, respetando el tamaño muestral necesario para ofrecer una estimación pero sin retroceder excesivamente en el tiempo, se proporciona una mejor estimación condicionada a la información disponible en el instante τ .

donde:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\beta} &= \left(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1 \right)^t & B &= \left(\begin{array}{cc} \sum_j \frac{n_j}{d_0^j} & \sum_{i,j,\tau} \frac{f(q_{ij\tau})}{d_0^j} \\ \sum_{i,j,\tau} \frac{f(q_{ij\tau})}{d_0^j} & \sum_{i,j,\tau} \frac{f^2(q_{ij\tau})}{d_0^j} \end{array} \right)^{-1} \\
 \widehat{\beta}_0 &= \bar{c} - \widehat{\beta}_1 \bar{q} & \widehat{\beta}_1 &= \frac{S_{qc}}{S_q^2} \\
 a_{t'} &= a_0 + \frac{n+t'}{2} - 1 & b_{t'} &= b_0 + \frac{1}{2}[(t' - 1)s_{R_{s'}}^2 + t'(\frac{\overline{R_{s'}} - m_0}{t'c_0 + 1})^2] \\
 & & &+ \frac{1}{2}(n - 1)(S_c^2 - S_{qc}\widehat{\beta}_1)
 \end{aligned} \tag{11}$$

con $\overline{R_{s'}}$ y $s_{R_{s'}}^2$, la media y varianza muestral estándar respectivamente de la muestra, $s' = \{R_i\}_{i=1}^{t'}$, n_j el número de opciones de compra con precio de ejercicio K_j , vencimiento T_j y clasificación j en la muestra, $\bar{q} = [\sum_{i,j,\tau} f(q_{ij\tau})/d_0^j]/[\sum_j n_j/d_0^j]$, $\bar{c} = [\sum_{i,j,\tau} f(C_{ij\tau})/d_0^j]/[\sum_j n_j/d_0^j]$, $S_q^2 = [\sum_{i,j,\tau} (f(q_{ij\tau}) - \bar{q})^2/d_0^j]/(n-1)$, $S_c^2 = [\sum_{i,j,\tau} (f(C_{ij\tau}) - \bar{c})^2/d_0^j]/(n-1)$, $S_{qc} = [\sum_{i,j,\tau} [(f(q_{ij\tau}) - \bar{q})(f(C_{ij\tau}) - \bar{c})]/d_0^j]/(n-1)$ y $n = \sum_j n_j$. Y, por tanto, una distribución final sobre σ^2 que permite obtener una estimación subjetiva de la volatilidad que incorpora las expectativas del inversor sobre el subyacente.

Es interesante notar a partir de [10] que en la distribución final del cuadrado de la volatilidad y por tanto en la estimación de dicho parámetro se combinan, concretamente a través del parámetro $b_{t'}$, la información *pasada* sobre volatilidad contenida en la serie histórica del subyacente (segundo sumando), la información *futura* contenida en las series históricas de los precios de las opciones (tercer sumando) y las expectativas de los agentes (primer sumando). En conclusión, la aproximación Bayesiana permite combinar formalmente los dos procedimientos propuestos por la literatura (p.e. Engle y Mustafa (1992)) para estimar el parámetro volatilidad⁸ del modelo de Black y Scholes (1973) y en consecuencia valorar opciones.

⁸Para obtener una estimación neutral al riesgo de la volatilidad nos basaríamos en la distribución final que se obtiene a partir de [2]-[3] y [6]-[7], la información muestral sobre el subyacente y las opciones de compra, y los precios teóricos $\{q_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq t < t'}$ estimados de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$ dados los precios de subyacente en el intervalo $[0, t']$ (véanse detalles en el apéndice):

$$\sigma^2 \mid S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq t < t'} \sim GIG(\lambda_{t'}, \chi_{t'}, \Psi_{t'})$$

donde GIG es la distribución Gaussiana inversa generalizada (Barndorff-Nielsen (1977) y Atkinson (1982)) y $\lambda_{t'}, \chi_{t'}, \Psi_{t'}$ están definidos en [14].

2.3 Distribuciones predictivas de las primas sobre opciones de compra

Nuestro inversor para diseñar su estrategia óptima en opciones necesita conocer, en el momento de la inversión y teniendo en cuenta la información muestral disponible hasta ese momento, el precio al que va a poder comprar o vender una opción de compra o venta dada, es decir, su precio neutral o de referencia, y cuantificar cuánto vale esa opción de acuerdo con sus expectativas sobre la evolución del subyacente.

En términos metodológicos, extendiendo la ecuación [6] para modelizar el precio actual ($k = 0$) y futuro ($t' + k, 0 < k \leq T_i - t'$) en t' de una opción de compra, $C_{ij t'+k}^{(t')}$, con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según *moneyness* en t' y ($m_i = S_{t'}/K_i$) y/o plazo vencimiento tenemos que:

$$f\left(C_{ij t'+k}^{(t')}\right) = \beta_0 + \beta_1 f\left(q_{ij t'+k}^{(t')}\right) + u_{ij t'+k}^{(t')} \\ u_{ij t'+k}^{(t')} \stackrel{ind}{\sim} N\left(0, d_k^j \sigma^2\right) \quad [12]$$

donde $q_{ij t'+k}^{(t')} = e^{-r \cdot (T_i - t' - k)} E_{t'}[\max(S_{T_i} - K_i, 0)]$, $d_k^j > 0$ es un parámetro inicial positivo que depende de la clasificación j según *moneyness* y vencimiento y el horizonte temporal k , y la expresión *ind* indica que los errores se asumen independientes entre sí y respecto a los errores definidos en [7]. Y necesitamos deducir, a partir de [12], la distribución predictiva de $C_{ij t'+k}^{(t')}$ dada la información muestral disponible en t' ($\{C_{ij \tau}\}_{i,j,t \leq t'}$ y $S_i, i=0,1,2, \dots, t'$) en un contexto neutral al riesgo (ecuaciones [2]-[3] y [6]-[7], con $d_k^j > 0$ un parámetro inicial asumible por todos los miembros del mercado) y en contexto definido por las expectativas del inversor (ecuaciones [2]-[9] sustituyendo τ por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$, y [6]-[7] con $m_0, c_0 > 0, a_0 > 0, b_0 > 0$ y $d_k^j > 0$ parámetros iniciales que representan las expectativas del inversor) respectivamente.

- Distribución predictiva de las primas en un contexto de neutralidad al riesgo

Como acabamos de indicar, nuestro inversor para diseñar su estrategia óptima en opciones necesita una estimación del precio al que va a poder comprar o vender las opciones de compra y venta (precio neutral o de referencia de la prima) sobre las que va a definir su estrategia. Esa estimación debe basarse en un modelo de equilibrio del mercado y por lo tanto cumplir los requisitos de una valoración neutral al riesgo, y a la vez debe tener en cuenta los factores de negociación del mercado y

sus efectos sobre el precio para que el precio de referencia finalmente estimado sea una buena estimación del precio de cruce en el mercado de derivados.

Para cumplir estos objetivos consideremos el modelo (de aquí en adelante, y cometiendo un abuso de notación, nuestro modelo de valoración de opciones en un contexto de neutralidad al riesgo) definido por las ecuaciones [2]-[3] y [6]-[7] y la ecuación [12] con $d_k^j > 0$ ($k \geq 0$) un parámetro inicial que representa una relación entre las volatilidades de los mercados de derivados y al contado que puede ser asumida de forma general por todos los miembros del mercado de derivados en función de la clasificación j de cada opción de compra en términos de *moneyness* y/o plazo hasta vencimiento y del horizonte temporal de predicción. Y obtengamos la distribución predictiva del precio neutral o de referencia de una opción de compra en $t' + k$ ($0 \leq k \leq T_i - t'$) con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según *moneyness* y/o plazo vencimiento observados los precios de los contratos de opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t')$, $\{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$, y los precios del subyacente en el intervalo $[0, t']$, S_i $i = 0, 1, 2, \dots, t'$, y estimados los precios teóricos $\{q_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t')$ y el precio teórico de $q_{ij t'+k}^{(t')}$ dados los precios de subyacente en el intervalo $[0, t']$ (véanse ecuaciones [1], [4] y definición de $q_{ij t'+k}^{(t')}$). Esta distribución predictiva viene dada (véanse detalles en apéndice) por:

$$f\left(C_{ij t'+k}^{(t')}\right) / \sqrt{d_{t'}^j} \mid S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'} \sim GH[\lambda_{t'}, \alpha_{t'}, 0, \delta_{t'}, \mu_{t'}] \quad [13]$$

donde:

$$\begin{aligned} \lambda_{t'} &= -\frac{n+t'}{2} + 1 & \chi_{t'} &= (t' - 1)s_{R_{S'}}^2 + t'(\bar{R}_{S'} - r)^2 \\ \psi_{t'} &= \frac{t'}{4} & &+ (n - 1)(S_c^2 - S_{qc}\hat{\beta}_1) \\ \alpha_{t'} &= \sqrt{\psi_{t'}} & \mu_{t'} &= \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 f(q_{ij t'+k}^{(t')})}{\sqrt{d_{t'}^j}} \\ \delta_{t'} &= \sqrt{\chi_{t'}} & d_{t'}^j &= d_k^j + \frac{1}{\sum_j \frac{n_j}{d_0^j}} + \frac{(f(q_{ij t'+k}^{(t')}) - \bar{q})^2}{(n-1)S_q^2} \end{aligned} \quad [14]$$

A partir de esta distribución predictiva obtenemos por simulación la distribución predictiva neutral o de referencia de $C_{ij t'+k}^{(t')} \mid S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ y estimamos el precio neutral o de referencia en $t' + k$ ($0 \leq k \leq T_i - t'$) dada la información disponible en t' de la opción

de compra con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j . Dado que nuestros contratos son europeos, los precios actuales⁹ ($k = 0$) neutrales o de referencia de las opciones de venta se estiman aplicando la relación de paridad *put-call* (ecuación [8]) sobre los precios actuales neutrales o de referencia de las correspondientes opciones de compra.

- *Distribuciones predictivas de las primas y del subyacente a vencimiento según las expectativas del inversor*

Por otra parte, nuestro inversor para diseñar su estrategia de inversión óptima en opciones también necesita:

1. Una estimación del precio de las opciones (precio subjetivo de la prima) que incorpore sus expectativas sobre la evolución del subyacente y que unida a su estimación sobre el precio neutral o de referencia de las mismas le permita cuantificar si las opciones están infravaloradas o sobrevaloradas desde su perspectiva sobre la evolución del mercado al contado.
2. Y una estimación del precio del subyacente (precio subjetivo del subyacente) para los distintos vencimientos que incorpore sus expectativas y le permita controlar el riesgo económico asociado a las posibles estrategias de inversión.

El modelo apropiado para reflejar estas expectativas (que llamaremos a partir de ahora modelo de valoración de opciones según las expectativas del inversor) queda definido por las ecuaciones [2]-[9] sustituyendo r por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$, y [6]-[7] con $m_0, c_0 > 0, a_0 > 0$ y $b_0 > 0$ parámetros iniciales que representan las expectativas de nuestro inversor (no necesariamente coincidentes con las del mercado) sobre la evolución de la volatilidad del mercado al contado (parámetros a_0 y

⁹Para estimar los precios neutrales futuros de las opciones de venta se puede aplicar la relación de paridad *put-call* sustituyendo el precio futuro del subyacente por una estimación del mismo basada en la información disponible en t' . Esta estimación (basada en el modelo de valoración de opciones en un contexto de neutralidad al riesgo) se obtendría a partir de la distribución predictiva del precio neutral o de referencia del subyacente en $t' + k$ ($1 \leq k \leq T - t'$) dada la información disponible en t' (véanse detalles en el apéndice):

$$\begin{aligned} & \log S_{t'+k} / \sqrt{k} | S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq t'} \\ & \sim GH \left[\lambda_{t'}, \sqrt{\psi_{t'+k/4}}, -\sqrt{k} / 2, \delta_{t'}, (r k + \log S_{t'}) / \sqrt{k} \right] \end{aligned}$$

donde $\lambda_{t'}, \psi_{t'}, \delta_{t'}$ están definidos en [14].

b_0), y la tendencia y variabilidad (en relación al mercado al contado) de la tasa de rentabilidad compuesta continua del subyacente (parámetros m_0 y c_0).

Asumiendo este modelo y la ecuación [12] con $d_k^j > 0$ ($k \geq 0$) un parámetro inicial que expresa, desde el punto de vista del inversor, la relación entre las volatilidades de los mercados de derivados y al contado en función del ratio de *moneyness* y/o plazo hasta vencimiento y del horizonte temporal de predicción, la distribución predictiva del precio subjetivo de una opción de compra en $t' + k$ ($k \geq 0$) observados los precios de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$, $\{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$, y del subyacente en el intervalo $[0, t']$, $S_i, i = 0, 1, 2, \dots, t'$, y estimados los precios teóricos $\{q_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t')$ y el precio teórico de $q_{ij t'+k}^{(t')}$ dados los precios de subyacente en el intervalo $[0, t']$ (véanse ecuaciones [1], [4] y definición de $q_{ij t'+k}^{(t')}$) viene dada (véanse detalles en Apéndice A1) por¹⁰:

$$f\left(C_{ij t'+k}^{(t')}\right) / \sqrt{d_{i'}^j} \mid S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq t < t'} \sim St \left[\mu_{t'}, b_{t'} / a_{t'}, 2a_{t'} \right] \quad [15]$$

Por simulación se obtienen la distribución predictiva subjetivas de $C_{ij t'+k}^{(t')} \mid S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t < \tau < t'}$ y se estima el precio subjetivo en $t' + k$ ($0 \leq k \leq T_i - t'$) dada la información disponible en t' de la opción de compra con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j . Por otra parte, dado que nuestros contratos son europeos, los precios actuales¹¹ ($k = 0$) subjetivos de las opciones de venta se estiman *aplicando* la relación de paridad *put-call* (ecuación [8]) sobre los precios actuales subjetivo de las correspondientes opciones de compra. A partir de las estimaciones de los precios neutral y subjetivos diremos que una opción en $t' + k$ está infravalorada/sobrevalorada desde el punto

¹⁰Recordemos que si $x \sim St(\mu, \sigma^2, \alpha)$ entonces $x \in (-\infty, \infty)$, $f(x \mid \mu, \sigma^2, \alpha) = \{\Gamma[(\alpha + 1)/2] / [(\alpha\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha/2)]\} [1 + (x - \mu)^2 / (\alpha\sigma^2)]^{-(\alpha+1)/2}$ y los primeros momentos vienen dados por: $E(x) = \mu$, si $\alpha > 1$, y $V(x) = [\alpha / (\alpha - 2)] \sigma^2$ si $\alpha > 2$.

¹¹Para estimar los precios subjetivos futuros de las opciones de venta se puede aplicar la relación de paridad *put-call* sustituyendo el precio futuro del subyacente por una estimación del mismo basada en la información disponible en t' . Esta estimación (basada en el modelo de valoración de opciones según las expectativas del inversor) se obtendría a partir de la distribución predictiva del precio subjetivo del subyacente en $t' + k$ ($1 \leq k \leq T - t'$) dada la información disponible en t (ecuación [16]).

de vista del inversor si su precio de referencia es inferior/superior a su precio subjetivo respectivamente.

Finalmente, asumiendo el modelo de valoración de opciones según las expectativas del inversor, observados los precios de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$, $\{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ y del subyacente en el intervalo $[0, t']$, $S_i, i = 0, 1, 2, \dots, t'$, y estimados los precios teóricos $\{q_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$, se obtiene (véanse detalles en apéndice) la distribución predictiva del precio subjetivo del subyacente en la fecha del vencimiento $T(T > t')$:

$$\log S_T | S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'} \sim St \left[m_{t'}, b_{t'} / a_{t'}, e_{t'} \cdot 2a_{t'} \right] \quad [16]$$

donde $m_{t'} = (T - t')[(c_0 t' \bar{R}_{s'} + m_0)/(c_0 t' + 1)] + \log(S_{t'})$ y $e_{t'} = (T - t')[1 + (T - t')c_0/(c_0 t' + 1)]$.

Por simulación, a partir de la distribución predictiva [16] se obtiene la distribución predictiva de los precios del subyacente a vencimiento, $S_T | S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$, y se estiman (usando los correspondientes cuantiles y, en este trabajo, considerando intervalos centrados) los intervalos de confianza sobre el precio del subyacente a vencimiento según la información muestral disponible y las expectativas iniciales del inversor. Estos intervalos permiten valorar los resultados finales de las estrategias posibles implementadas por cada inversor de una forma intuitiva y sencilla. Otra posible aplicación de esta distribución predictiva es la obtención de la distribución predictiva de la variable $\max(S_T - K_i, 0) | S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$; y a partir de la misma y de la definición de $q_{ij\tau}^{(t')}$ (véase expresión después de la ecuación [12]), la estimación en t' de un precio (subjetivo) actual o futuro de la opción de compra con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j . Este artículo no recomienda este segundo uso porque proporciona una estimación del precio de la opción que no tiene en cuenta las características del mercado de derivados. En mi opinión estas distribuciones sobre los precios del subyacente sólo son aplicables para estimar el resultado cuando se ejerce la opción; en este caso, dado que nuestras opciones son europeas, en el instante de vencimiento.

3. Obtención de estrategias óptimas en el mercado de opciones

Una vez establecidos los instrumentos necesarios para estimar el precio actual neutral o de referencia y subjetivo de los contratos de opciones y de los resultados a vencimiento de una estrategia de inversión dada, el siguiente paso es determinar cuál es la estrategia inicial óptima de inversión en opciones según las expectativas de nuestro inversor y la información sobre precios de opciones de compra y subyacente proporcionada en dicho instante por el mercado de derivados y al contado, y cómo se debe actualizar en el tiempo dicha estrategia para que siga siendo óptima. En esta sección proponemos solucionar este problema resolviendo una serie de programas lineales enteros en los que se revisa la estrategia óptima inicial actualizando la información sobre precios de opciones de compra y subyacente proporcionada por el mercado de derivados y al contado.

Asumamos algunas hipótesis para poder describir el problema de nuestro inversor en términos sencillos y operacionales:

- Los activos derivados: opciones de compra y venta europeas¹², se definen sobre un único subyacente.
- Durante el período de inversión el subyacente no reparte dividendos¹³.
- No hay costes de transacción directos ni impuestos.
- Los modelos de valoración de opciones en un contexto de neutralidad al riesgo y según las expectativas del inversor describen de forma adecuada los precios de las opciones de compra y subyacente y por lo tanto permiten obtener estimaciones de los precios de cruce de las opciones de compra/venta en el mercado de derivados (precios neutrales o de referencia) y de los precios de las opciones de compra/venta y del resultado a vencimiento de una

¹²La restricción a opciones de tipo europeo es útil para simplificar el planteamiento del problema de programación. Y la debilitación de esta hipótesis (a opciones americanas) exige un esfuerzo de programación y computacional extra al requerir la resolución de problemas adicionales intermedios para decidir entre la estrategia de mantener o ejercer de forma anticipada las opciones de venta.

¹³Los dividendos se pueden introducir fácilmente en el problema ajustando el precio del subyacente de forma continua por dividendos y estableciendo las expectativas de evolución sobre los rendimientos totales.

estrategia de inversión dada (precio/resultado subjetivo) según las expectativas de nuestro inversor respectivamente.

- La decisión del inversor se basa en su estimación sobre: los precios actuales ($k = 0$) neutrales o de referencia (ecuación [13]) y subjetivos (ecuación [15]) para las distintas opciones europeas de compra; los correspondientes precios de las opciones de venta, que calculamos aplicando la relación de paridad *put-call* (ecuación [8]); y el intervalo de confianza obtenido para el precio subjetivo del subyacente en los vencimientos que se producen en el período de inversión (ecuación [16]) para un nivel de confianza (o aversión al riesgo) dado.
- El proceso de optimización tiene varias etapas, y en cada etapa la cartera óptima de la etapa anterior se reajusta actualizando la información muestral del mercado de derivados y al contado en la estimación de los precios de las opciones y pronóstico sobre los resultados.
- El objetivo del inversor es maximizar el beneficio estimado por el inversor según sus expectativas en cada etapa debido a la diferencia entre los precios de subjetivos y referencia a fecha d de la cartera óptima activa (formada por contratos aún no vencidos), y la estrategia óptima de cada etapa queda definida por la compra o venta de un número entero de opciones.
- Para determinar esa estrategia óptima el agente asume unas restricciones sobre las variables de decisión (opciones a comprar o vender). Las restricciones básicas que consideraremos en el planteamiento se basan en el presupuesto disponible, la exigencia de resultados positivos o nulos de la cartera para todo valor del subyacente en los intervalos de confianza fijados para los vencimientos activos en la etapa para un nivel de confianza dado y el volumen de contratos negociables en cada etapa.
- La función objetivo y restricciones han de ser todas ellas lineales¹⁴.

¹⁴La exigencia de linealidad en la función objetivo y restricciones del problema de optimización es debida a la necesidad de algoritmos de optimización eficientes para resolver los problemas de programación. En este trabajo se ha empleado el programa GAMS 25 (<http://www.gams.com>) y el paquete de algoritmos CPLEX.

De acuerdo con estas hipótesis y denotando por:

$(0, D]$: Intervalo de inversión, con D igual a la fecha del último vencimiento considerado.

d : Etapa del proceso de optimización, $d = 1, \dots, D$.

s_d : Información muestral del mercado al contado y derivado disponible al inicio de la etapa d .

c_{ijd} : Precio estimado subjetivo de la opción de compra con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según moneyness y/o plazo vencimiento para la etapa d . c_{ijd} se estima a partir de la distribución de $C_{ijd}|s_d$ deducida en la ecuación [15].

c_{ijd}^n : Precio estimado de referencia de la opción de compra con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según moneyness y/o plazo vencimiento para la etapa d . c_{ijd}^n se estima a partir de la distribución de $C_{ijd}|s_d$ deducida en la ecuación [13].

p_{ijd}/p_{ijd}^n : Precios estimados subjetivo(/de referencia) para la opción de venta. Obtenidos a partir de los anteriores aplicando la relación de paridad *put-call* (ecuación [8]).

E_{imd} : Precio hipotético m del subyacente a fecha de vencimiento T_i para la etapa d . Para cada etapa d y vencimiento T_i se calcula a partir de la distribución subjetiva de $S_{T_i}|s_d$ (deducida de [16]) el intervalo centrado de confianza a ; la secuencia $E_{i1d} \leq E_{i2d} \leq \dots$ representa los precios del subyacente del intervalo de confianza en los que valoramos el resultado de la cartera para ese vencimiento. Estos precios hipotéticos incluyen los extremos superior e inferior del intervalo y los precios de ejercicio pertenecientes al intervalo.

B_d : Beneficio de la cartera óptima activa estimado por el inversor según sus expectativas al inicio de la etapa d .

D_d : Presupuesto disponible para la etapa d .

$V \max_d$: Volumen máximo de opciones de cada tipo compradas y vendidas durante la etapa d .

Definimos las siguientes variables de decisión por etapa d :

uc_{ijd}^o : número de opciones de compra con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según *money-ness* y/o plazo compradas ($o = +1$) o vendidas ($o = -1$) en la etapa d .

up_{ijd}^o : número de opciones de venta con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según *money-ness* y/o plazo compradas ($o = +1$) o vendidas ($o = -1$) en la etapa d .

donde uc_{ijd}^o y up_{ijd}^o toman valores positivos y enteros¹⁵.

Y las siguientes variables que definen la posición de compra/venta óptima actual en cada contrato después de tomar la decisión de la etapa d por:

xc_{ijd}^o/xp_{ijd}^o : número total de opciones de compra/venta con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según *money-ness* y/o plazo hasta vencimiento compradas ($o = +1$) o vendidas ($o = -1$) en el período $[1, d]$. Esto es: $xc_{ij0}^o = xp_{ij0}^o = 0, xc_{ijd}^o = xc_{ijd-1}^o + (uc_{ijd}^o)^*$, $xp_{ijd}^o = xp_{ijd-1}^o + (up_{ijd}^o)^*$ donde $(.)^*$ representa la solución óptima del problema lineal entero de la etapa d .

Con lo que la cartera óptima en d en opciones de compra y venta con precio de ejercicio K_i , vencimiento T_i y clasificación j según *money-ness* y/o plazo hasta vencimiento viene dada por $xc_{ijd}^{+1} - xc_{ijd}^{-1}, xp_{ijd}^{+1} - xp_{ijd}^{-1}, \forall i, j$ respectivamente.

¹⁵Con esta definición garantizamos el requisito de positividad de las variables de decisión de los problemas de programación lineales pero permitimos que en una misma etapa se compra y venda un mismo contrato. Obviamente, la posición neta en el contrato será la diferencia entre los contratos comprados y vendidos.

El problema de programación lineal entera que tenemos que resolver en d es:

$$\begin{aligned}
 &Max \sum_{ij} (c_{ijd} - c_{ijd}^n) (uc_{ijd}^{+1} - uc_{ijd}^{-1}) + \\
 &+ \sum_{ij} (p_{ijd} - p_{ijd}^n) (up_{ijd}^{+1} - up_{ijd}^{-1}) + B_d \\
 &s.a. \sum_{ij} c_{ijd}^n (uc_{ijd}^{+1} - uc_{ijd}^{-1}) + \sum_{ij} p_{ijd}^n (up_{ijd}^{+1} - up_{ijd}^{-1}) \leq D_d \\
 &\sum_j \max(0, E_{imd} - K_i) (uc_{ijd}^{+1} - uc_{ijd}^{-1}) + \\
 &+ \sum_j \max(0, K_i - E_{imd}) (up_{ijd}^{+1} - up_{ijd}^{-1}) + R_{imd} \geq 0, \forall i, \forall m \\
 &uc_{ijd}^{+1}, uc_{ijd}^{-1}, up_{ijd}^{+1}, up_{ijd}^{-1} \leq V_{\max_d}, \forall i, \forall j \\
 &uc_{ijd}^{+1}, uc_{ijd}^{-1}, up_{ijd}^{+1}, up_{ijd}^{-1} \in Z^+, \forall i, \forall j
 \end{aligned} \tag{17}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 B_d &= \sum_{ij} (c_{ijd} - c_{ijd}^n) (xc_{ijd-1}^{+1} - xc_{ijd-1}^{-1}) + \\
 &+ \sum_{ij} (p_{ijd} - p_{ijd}^n) (xp_{ijd-1}^{+1} - xp_{ijd-1}^{-1}) + \\
 D_d &= D_{d-1} - \sum_{ij} c_{ijd-1}^n (uc_{ijd-1}^{+1} - uc_{ijd-1}^{-1}) - \\
 &- \sum_{ij} p_{ijd-1}^n (up_{ijd-1}^{+1} - up_{ijd-1}^{-1}) \\
 R_{imd} &= \sum_j \max(0, E_{imd} - K_i) (xc_{ijd-1}^{+1} - xc_{ijd-1}^{-1}) + \\
 &+ \sum_j \max(0, K_i - E_{imd}) (xp_{ijd-1}^{+1} - xp_{ijd-1}^{-1})
 \end{aligned} \tag{18}$$

los índices (i,j) se refieren a contratos sobre opciones activos, $B_1 = 0$ y D_1 es igual al presupuesto total de inversión.

El problema de programación [17]-[18] tiene algunas características particulares que merecen algunos comentarios:

- El inversor para determinar la cartera óptima en cada etapa d tiene en cuenta su cartera actual activa (al inicio de la etapa d) en dos sentidos: a) valorándola de acuerdo con sus estimaciones de los precios neutrales o de referencia y subjetivos de los contratos para la etapa d (B_d) y sumándola al beneficio estimado de la estrategia óptima de la etapa d . Y b) usándola para limitar

el conjunto de decisiones posibles en la restricción presupuestaria (1ª restricción en [17]) y las restricciones referentes al riesgo asumido por el inversor (2ª grupo de restricciones en [17]); en el primer caso evitando que la inversión total del período supere el presupuesto disponible en la etapa, y en el segundo sumando a los posibles resultados a vencimiento de las decisiones de la etapa d , los resultados (R_{imd}) de la cartera óptima activa actual de acuerdo con las estimaciones subjetivas del subyacente para esta etapa.

- En relación a la función objetivo, notemos que la exigencia de linealidad es respecto a las variables de decisión del problema y que las estimaciones (Bayes) de los precios neutrales o de referencia y subjetivos, y por tanto los beneficios unitarios por posición en cada contrato de opción, se basan en la minimización del valor esperado de una función de pérdida que, en principio, puede ser no simétrica.
- Las restricciones sobre volumen garantizan la acotación del problema aunque éste puede volverse infactible en alguna etapa. En la práctica, la infactibilidad se produce en etapas intermedias cuando se acumula información histórica en cantidad suficiente para cambiar nuestras estimaciones subjetivas sobre los precios, la cartera óptima construida deja de ser satisfactoria a nivel de resultados futuros y tenemos que vender opciones en cantidades superiores al volumen máximo permitido y/o comprar opciones no disponiendo de presupuesto suficiente.
- La restricción presupuestaria (primera restricción en [17]) refleja la capacidad que tiene el agente de autofinanciar su estrategia vendiendo opciones¹⁶. Es importante notar que para definir esta restricción usamos el precio neutral o de referencia como estimación de los precios de compra y venta reales del mercado de opciones. Usando estos precios disponemos de una predicción de los precios de mercado de las opciones¹⁷ para estimar la inversión

¹⁶Recordemos que muchas estrategias especulativas se construyen con la venta de opciones, citemos por ejemplo: diferenciales alcistas y bajistas, cunas y conos vendidos, mariposas y cóndores comprados y vendidos, *spreads* verticales, etc.

¹⁷Resolvemos de este modo una de las debilidades más visibles del procedimiento de fijación de expectativas y estimación de carteras óptimas propuesto en el artículo de Font (2004), en el que se define la restricción presupuestaria sobre los propios precios negociados durante el día.

en cada etapa y calcular los beneficios en términos netos, el inconveniente son las imprecisiones que puedan derivar por errores de predicción.

- La restricción sobre el riesgo, de gran relevancia en este tipo de problemas por el distinto nivel potencial de pérdida entre estrategias¹⁸, se introduce mediante una batería de restricciones lineales (segundo grupo de restricciones en [17]) y tiene una interpretación muy sencilla: sólo consideramos como decisiones posibles del problema aquellas que proporcionen resultados positivos en sus correspondientes vencimientos para valores del subyacente pertenecientes a un determinado intervalo de confianza basado en las expectativas e información muestral del inversor. Cuanto mayor es el porcentaje de confianza fijado para establecer este intervalo, mayor aversión al riesgo de nuestro inversor. No estamos ante la solución *habitual* (controlar la varianza de los beneficios netos en cada fecha) pero esta solución que ya ha sido aplicada en otros trabajos (véase Balbás *et al.* (2000) para descubrir oportunidades de arbitraje o Font (2004) para este tipo de problemas) y tiene algunas ventajas adicionales sobre aquella: a) es más intuitiva y práctica desde el punto del inversor porque controla las posibles pérdidas de la cartera a vencimiento, de hecho, las garantías se establecen para garantizar los pagos asociados a esas pérdidas y se basan en variantes de esta idea; b) permite reflejar el efecto sobre el riesgo (y en consecuencia en las correspondientes carteras óptimas) de la asimetría de la distribución de los resultados de las opciones a vencimiento¹⁹; y c) a nivel de resolución del problema de optimización la sustitución de la restricción de la varianza por un grupo de restricciones lineales aumenta la efectividad de resolución de los algoritmos por dos vías: la linealidad y el incremento en el número de restricciones del problema.
- El problema de optimización hace una distinción clara entre los beneficios que proceden del mercado de opciones, están afectados

¹⁸ Compárese, mediante la gráfica de beneficios a vencimiento, el potencial de pérdida de las siguientes parejas de estrategias especulativas: opción de compra comprada y opción de venta vendida, diferencial alcista y túnel alcista, mariposa comprada y cono vendido, etc.

¹⁹ La literatura proporciona numerosas evidencias teóricas y empíricas sobre estas asimetrías, p.e. Bookstaber y Clarke (1985).

por los costes indirectos y fricciones de este mercado y se refieren al día a día de la negociación (en la función objetivo), y los resultados a vencimiento de la cartera que se establecen a partir de los precios del subyacente negociados en el mercado a contado (en las restricciones de riesgo).

- Los costes de transacción directos y debidos a las garantías se pueden introducir directamente en la función objetivo y restricciones de riesgo respectivamente manteniendo la estructura matemática del problema propuesto.

Señalemos, para finalizar, que el problema de optimización propuesto no es necesariamente el mejor programa de optimización posible para todo inversor. Un inversor concreto puede considerar más adecuada una función objetivo que maximice los beneficios estimados de acuerdo con una función de utilidad no lineal, o bien puede considerar interesante incluir algunas restricciones adicionales que fijen cotas a la compra o venta de determinadas opciones, establezcan compras o ventas por lotes, hagan excluyentes la compra y/o venta de determinado/s contrato/s,... En cualquiera de estas situaciones, las distribuciones predictivas deducidas en la subsección 2.3 seguirán proporcionando la información necesaria para diseñar objetivo y restricciones del nuevo problema.

4. Estrategias de inversión óptimas en opciones sobre el índice IBEX-35

Completamos esta exposición ilustrando el procedimiento propuesto mediante la obtención de carteras de inversión óptimas con revisión diaria en opciones sobre el IBEX-35 para el período de inversión comprendido entre el 20/11/2006 y el 16/03/2007 y nueve tipos de expectativas individuales: 1) tendencia decreciente y volatilidad baja, 2) tendencia decreciente y volatilidad media, 3) tendencia decreciente y volatilidad alta, 4) indeciso en tendencia y volatilidad baja, 5) indeciso en tendencia y volatilidad media, 6) indeciso en tendencia y volatilidad alta, 7) tendencia creciente y volatilidad baja, 8) tendencia creciente y volatilidad media y 9) tendencia creciente y volatilidad alta.

Las Opciones IBEX-35²⁰ son contratos sobre opciones de compra y venta europeas con las siguientes características: el activo subyacen-

²⁰ Este contrato de opciones vigente desde el 22/11/2001 sustituyó al contrato previo de opciones sobre el IBEX-35 sobre el futuro normal y con un multiplicador de 10 s .

te es un Futuro Mini sobre Ibex-35, las primas se cotizan en puntos enteros del futuro mini con una fluctuación mínima de un punto²¹, los precios de ejercicio negociables terminan en 50 o centena para los contratos con vencimiento inferior a los dos meses y en centena exacta para vencimientos superiores, los meses de vencimiento abiertos a negociación son los tres meses correlativos más próximos y los otros tres del ciclo marzo-junio-septiembre-diciembre, la fecha de vencimiento y último día de negociación es el tercer viernes del mes de vencimiento, y se liquidan por diferencias. Aunque desde un punto de vista formal, el activo subyacente de las opciones IBEX-35 es otro derivado, el Futuro Mini sobre IBEX-35, éste tiene como subyacente el índice IBEX-35 y podemos considerar (recordando que futuro y subyacente convergen a fecha vencimiento y la opción es europea) que el subyacente de las opciones es el propio índice IBEX-35. En relación a este último, el IBEX-35 es un índice ponderado por capitalización de los 35 activos más líquidos del mercado cotizados en el Sistema de Interconexión Bursátil de las cuatro Bolsas Españolas, que corrige ampliaciones y reducciones de capital pero no dividendos²².

Los datos empleados para realizar esta implementación han sido la serie de precios diarios de apertura del índice IBEX-35 facilitada por la Sociedad de Bolsas (www.sbolsas.es) y los precios diarios del último cruce (con precio y volumen positivos) de las opciones de compra sobre el IBEX-35 de los cinco primeros vencimientos (el 93.36% del total de las operaciones cruzadas) para el período comprendido entre el 3/01/2000 y el 30/03/2007 proporcionada por MEFF-RV (www.meff.es), y los tipos de interés negociados en operaciones simul-

²¹Un punto equivale a 1 s .

²²Esta circunstancia en principio podría tener alguna influencia en la obtención de los valores de los parámetros iniciales a partir de estimaciones muestrales de las series históricas del IBEX-35 y de las opciones de compra sobre el IBEX-35 (enero 2000 a marzo 2007). Sin embargo, esta influencia es mínima por las siguientes razones: a) los parámetros de las distribuciones iniciales no tienen porque coincidir con estimaciones muestrales, teóricamente son apreciaciones subjetivas del decisor, b) el índice IBEX-35 se calcula minuto a minuto y las opciones con vencimiento más próximo se negocian intradía, lo que facilita la disolución rápida del efecto ex-dividendo en ambos mercados, y c) obtenidas las series de los precios de apertura IBEX-35[®] y precio IBEX-35[®] con dividendos proporcionadas por la Sociedad de Bolsas y a partir de estas las correspondientes series de rendimientos para el período comprendido entre el 3/01/00 y el 30/03/07 (1825 observaciones), obtenemos un estadístico de contraste Kolmogorov-Smirnov para dos muestras de 0.02082 con lo que aceptamos la hipótesis de igualdad de ambas distribuciones a un nivel de significatividad del 20%.

táneas al contado para el período comprendido entre el 2/10/2006 y el 30/03/2007 publicados por el Banco de España (www.bde.es). Las series sobre precios del índice y de las opciones se dividieron en dos partes del 3/01/00 al 29/09/06 y del 2/10/06 al 30/03/07 empleándose la primera para calibrar el modelo²³ (obtener los parámetros iniciales de los nueve tipos de expectativas) y la segunda para obtener las estrategias de inversión (muestras y predicciones para cada expectativa).

4.1 Determinación de los parámetros iniciales

El calibrado del modelo se realiza a partir de las series de precios diarios de apertura del índice IBEX-35 y los precios diarios del último cruce (con precio y volumen positivos) de las opciones de compra sobre el IBEX-35 de los cinco primeros vencimientos para el período comprendido entre el 3/01/00 al 29/09/06 dividiendo las series en 82 subperíodos (el primero y último incompletos) de aproximadamente un mes de observaciones que comprenden el intervalo temporal entre dos vencimientos consecutivos de opciones.

Como podemos deducir del Gráfico 1, en el que se representan la serie de precios de apertura del IBEX-35 y la serie de las varianzas condicionales (estimadas cada subperíodo mediante un GARCH(1,1)), la serie de precios diarios de apertura del índice y sus correspondientes rendimientos, por su longitud y la variabilidad de escenarios de tendencia y volatilidad que comprenden, son adecuadas para describir los nueve tipos de expectativas considerados. Para calibrar el modelo procedemos de la siguiente manera: a) calculamos los estadísticos descriptivos media y desviación estándar de los rendimientos (logarítmicos) diarios del IBEX-35 para cada subperíodo; b) obtenemos los cuantiles 20% y 80% de las medias y desviaciones (véase Gráfico 2: Panel A), y clasificamos los subperíodos por tendencia (decreciente: media inferior al cuantil 20% para las medias, indeciso: media comprendida entre los cuantiles 20% y 80% para las medias, y creciente: media superior al cuantil 80% para las medias) y por volatilidad (baja: desviación inferior al cuantil 20% para las desviaciones estándar, media: desviación comprendida entre los cuantiles 20% y 80% para las desviaciones estándar, y alta:

²³Teóricamente, los parámetros iniciales deben ser fijados por los agentes en función de su experiencia y conocimientos acerca del mercado y no tienen por qué derivarse de series históricas. Sin embargo en este trabajo se ha optado para reducir la subjetividad de los resultados por un calibrado basado en la información histórica de las series de precios del índice y de las opciones de compra para un período de tiempo largo en el que podemos asumir que se reproducen los nueve modelos de expectativas.

desviación superior al cuantil 80% para las desviaciones estándar); y c) realizamos la clasificación cruzada de los subperiodos en las 9 expectativas consideradas en esta implementación. Los parámetros a_0 y b_0 (no se distingue tendencia) se obtienen a partir de su interpretación en términos de la media y varianza distribucional de una gamma inversa (nota 6) calculando la media y varianza ponderadas por número de observaciones de las volatilidades al cuadrado para subperiodos de volatilidad baja, media y alta. El parámetro m_0 se aproxima con la media ponderada de las medias para cada una de las 9 categorías cruzadas. Y el parámetro c_0 con el cociente entre la media ponderada de las volatilidades al cuadrado de cada categorías cruzada y la media ponderada de las volatilidades al cuadrado de la correspondiente clasificación de volatilidad. Es interesante notar, dando soporte a nuestra hipótesis distribucionales sobre los rendimientos en intervalos *cortos*, que sólo se rechaza la hipótesis de normalidad de los rendimientos con un nivel de significatividad del 5% para 4 subperíodos.

GRÁFICO 1

Representación de los precios diarios del índice IBEX-35 y de la varianza condicional de sus rendimientos (revisada cada subperíodo) para el intervalo comprendido entre 03/01/2000 al 29/09/2006

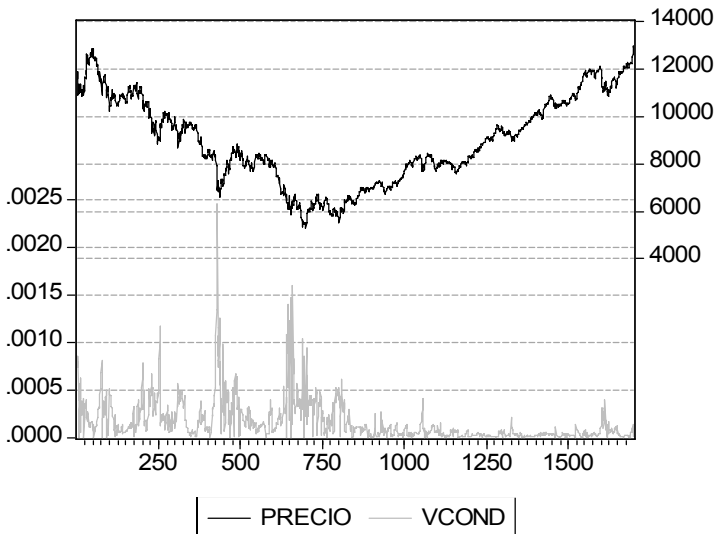
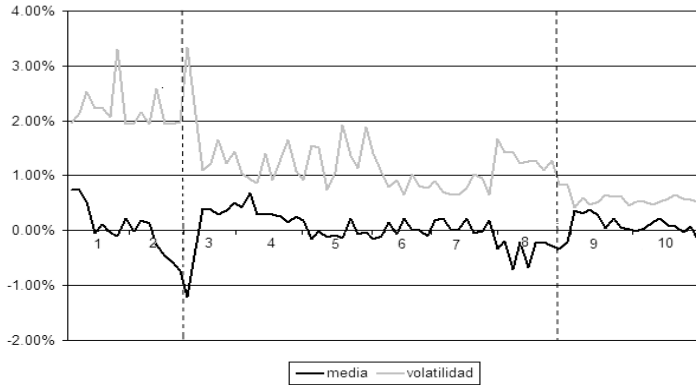


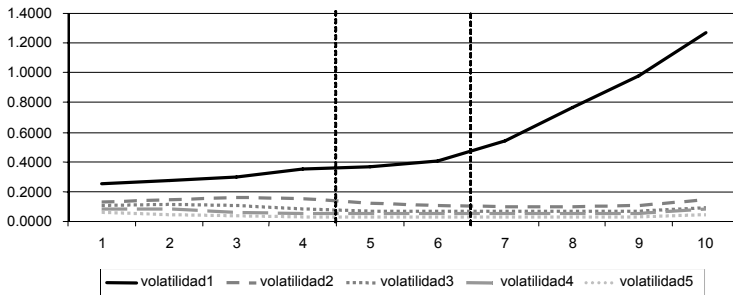
GRÁFICO 2

Clasificaciones de los subperiodos de la serie de rendimientos del IBEX-35 por tendencia y volatilidad y de las opciones en cada subperíodo por moneyness y tiempo hasta vencimiento para el período del 03/01/2000 al 29/09/2006

Representación de la media y volatilidad de los rendimientos diarios del índice IBEX-35 de cada subperíodo por decil



Representación de la volatilidad de los logaritmos del precio divididos por la raíz del plazo de opciones de compra de cada subperíodo y vencimiento por decil de *moneyness*



Para obtener los restantes parámetros iniciales recurrimos a las series de precios de opciones. Para determinar la función $f(\cdot)$ y la clasificación por *moneyness* y plazo que permite describir con más facilidad los datos, calculamos el valor de *moneyness* para todas las opciones de compra y agrupamos los datos por decil y vencimiento obteniendo los estadísticos descriptivos de media y volatilidad (el número que acompaña en el gráfico la palabra volatilidad indica el vencimiento) para tres funciones de los datos $f_1(C_{ijt}) = C_{ijt}$, $f_2(C_{ijt}) = \log C_{ijt}$ y $f_3(C_{ijt}) = \log C_{ijt} / \sqrt{T_i - t}$ y . La descripción más sencilla para la vo-

latitud de los precios de las opciones (Gráfico 2: abajo) se obtuvo para la tercera función.

A partir de esta representación y teniendo en cuenta el tipo de pendiente de la curva de volatilidad consideramos $f(C_{ijt}) = \log C_{ijt}/\sqrt{T_i - t}$, $j = 1, \dots, 4$, para cuatro clasificaciones según valor de *moneyness* y plazo de vencimiento. En primer lugar distinguimos entre contratos con vencimiento inferior al mes y superior al mes, y a continuación clasificamos los primeros atendiendo a su *moneyness* en *out of the money* (deciles 1 a 4: $m_1 < 0.9635$), *at the money* (deciles 5 a 6: $0.9635 \leq m_1 \leq 1.0007$) y *in the money* (deciles 7 a 10: $m_1 > 1.0007$) y los segundos en la categoría general de contratos de largo plazo. A continuación, se agruparon las series de precios de opciones en estas cuatro categorías se obtuvieron los estadísticos descriptivos media y desviación típica para los 82 subperíodos y las cuatro categorías. A partir de estos estadísticos se fijaron los parámetros d_0^j para la estimación de los precios actuales neutrales o de referencia de las primas (ecuación [13]) a partir del cociente entre la media ponderada de las volatilidades al cuadrado para cada clasificación *moneyness*-vencimiento y la media ponderada de las volatilidades al cuadrado y los parámetros d_0^j para la estimación de los precios actuales subjetivos de las primas (ecuación [15]) a través del cociente entre la media ponderada de las volatilidades al cuadrado para cada clasificación cruzada *moneyness*-vencimiento y volatilidad y la media ponderada de las volatilidades al cuadrado de la correspondiente clasificación de volatilidad. Rechazamos la hipótesis de normalidad con un nivel de significatividad del 5% para el 41.46% de las series *out of the money*, el 84.15% de las series *at the money*, el 98.78% de las series *in the money* y el 87.80% de las series de opciones con plazo de vencimiento superior al mes.

El Cuadro 1 recoge los valores de todos los parámetros iniciales para los nueve tipos de expectativas.

CUADRO 1
Parámetros de las distribuciones iniciales

		Volatilidad			
		Baja	Media	Alta	
Tendencia	Decreciente	a_0	19.7821	4.8275	7.1829
		b_0	5.680E-04	5.238E-04	3.262E-03
		m_0	-2.170E-03	-3.588E-03	-5.904E-03
		c_0	0.9146	1.1423	1.0146
		d_0^{out}	3750.91	513.27	200.41
		d_0^{at}	1767.59	696.06	323.33
		d_0^{in}	26786.71	6067.79	1719.61
		d_0^{long}	1277.75	330.01	94.27
	Indecisa	a_0	19.7821	4.8275	7.1829
		b_0	5.680E-04	5.238E-04	3.262E-03
		m_0	8.279E-04	4.454E-04	5.555E-04
		c_0	1.0563	0.9338	1.0112
		d_0^{out}	3750.91	513.27	200.41
		d_0^{at}	1767.59	696.06	323.33
		d_0^{in}	26786.71	6067.79	1719.61
		d_0^{long}	1277.75	330.01	94.27
	Creciente	a_0	19.7821	4.8275	7.1829
		b_0	5.680E-04	5.238E-04	3.262E-03
		m_0	3.276E-03	3.880E-03	6.698E-03
		c_0	0.8619	1.0616	0.9373
		d_0^{out}	3750.91	513.27	200.41
		d_0^{at}	1767.59	696.06	323.33
		d_0^{in}	26786.71	6067.79	1719.61
		d_0^{long}	1277.75	330.01	94.27
Neutral	d_0^{out}	438.55			
	d_0^{at}	492.80	d_0^{long}	226.37	
	d_0^{in}	4697.55			

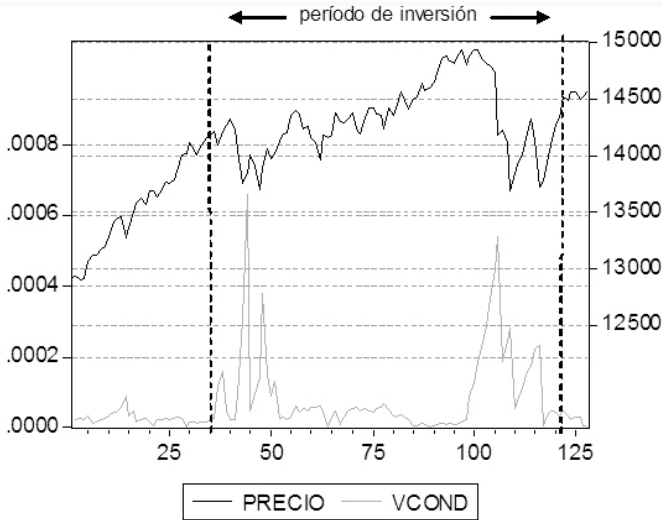
4.2 Características del período y del proceso de inversión

La implementación del proceso de inversión: generación de distribuciones predictivas para los precios de referencia y subjetivos de opciones sobre el IBEX-35 para nuestros nueve inversores tipo se realiza para el período comprendido entre el 2/10/2006 y el 30/03/2007. Durante este período, tal y como podemos apreciar en el Gráfico 3, que representa precios del índice y varianzas condicionales de los rendimientos, y en el Cuadro 2, que contiene algunos estadísticos descriptivos para los 7 subperíodos (primero y último incompletos) entre vencimientos de opciones consecutivos, el mercado al contado manteniendo unos niveles de volatilidad baja y una tendencia general creciente experimentó dos

cambios de tendencia importantes acompañados de aumento de volatilidad en los intervalos comprendidos entre el 28/11 y 4/12 (etapas 8 a 11), y el 23/02 y 1/03 (etapas 67 a 71).

GRÁFICO 3

Representación de los precios diarios del índice IBEX-35 y de la varianza condicional de sus rendimientos (revisada cada subperíodo) para el intervalo comprendido entre el 02/10/2006 y el 30/03/2007



CUADRO 2

Estadísticos descriptivos diarios de los rendimientos logarítmicos diarios del IBEX-35 por subperíodos para el intervalo comprendido entre el 2/10/2006 y el 30/03/2007

Intervalo	Media	Desv. Est.	Jarque-Bera	Clasif. Volatilidad	Clasif. Tendencia
02/10-20/10	0.002017	0.006178	3.161086	Baja	Indecisa
23/10-17/11	0.003240	0.004211	0.751155	Baja	Creciente
20/11-15/12	0.003382	0.010154	1.618798	Media	Creciente
18/12-19/01	-0.000760	0.007229	1.883559	Media	Indecisa
22/01-16/02	0.002774	0.005768	0.762578	Baja	Creciente
19/02-16/03	0.001586	0.014614	5.487536 [^]	Media	Indecisa
19/03-30/03	0.003418	0.006454	0.651025	Media	Creciente

Nivel de significatividad del contraste: 10% ([^]), 5% (^{*}) y 1% (^{**})

Para disponer de información muestral suficiente de los precios del subyacente y de las opciones de compra para estimar los precios teóricos de las opciones (véanse ecuaciones [1] y [4]) y, conocidos éstos los precios actuales neutrales o de referencia y subjetivos de las opciones (véanse las ecuaciones [13] y [15] respectivamente), el intervalo comprendido entre el 2/10 y el 17/11 se reserva para muestra y el intervalo de inversión se inicia el 20/11/06. Las características del proceso de inversión implementado con revisión diaria de la cartera óptima (véase, el problema de programación lineal entera planteado en [17]-[18]) son las siguientes:

- Intervalo de inversión: del 20/11/06 a 16/03/07, en total 82 días de negociación.
- Revisión de las carteras óptimas: diaria, con desplazamiento de la ventana muestral un día.
- Información muestral: la información muestral comprende una ventana móvil del tamaño de dos subperíodos entre vencimientos más la observación del propio día de los rendimientos del subyacente y de un subperíodo para los precios de las opciones²⁴ de compra con vencimientos 17/11, 15/12, 19/01, 16/02 y 16/03.
- Descripción de los contratos de opciones considerados: opciones de compra y venta sobre el IBEX-35 con precios de ejercicio 12.800, 13.400, 13.700, 14.000, 14.300, 14.600, 14.900 y 15.500, y vencimientos 15/12, 19/01, 16/02 y 16/03.
- Nueve tipos de expectativas: 1) tendencia decreciente y volatilidad baja, 2) tendencia decreciente y volatilidad media, 3) tendencia decreciente y volatilidad alta, 4) indeciso en tendencia y volatilidad baja, 5) indeciso en tendencia y volatilidad media, 6) indeciso en tendencia y volatilidad alta, 7) tendencia creciente y volatilidad baja, 8) tendencia creciente y volatilidad media y 9) tendencia creciente y volatilidad alta.

²⁴La duplicación del tamaño de la muestra del subyacente viene determinada por el propio proceso de modelización aplicado con cálculo de los precios teóricos en la primera fase de la estimación. Para calcular estos precios teóricos se desplaza una ventana muestral del tamaño de un subperíodo más el propio día en el que queremos calcular el precio teórico de la opción.

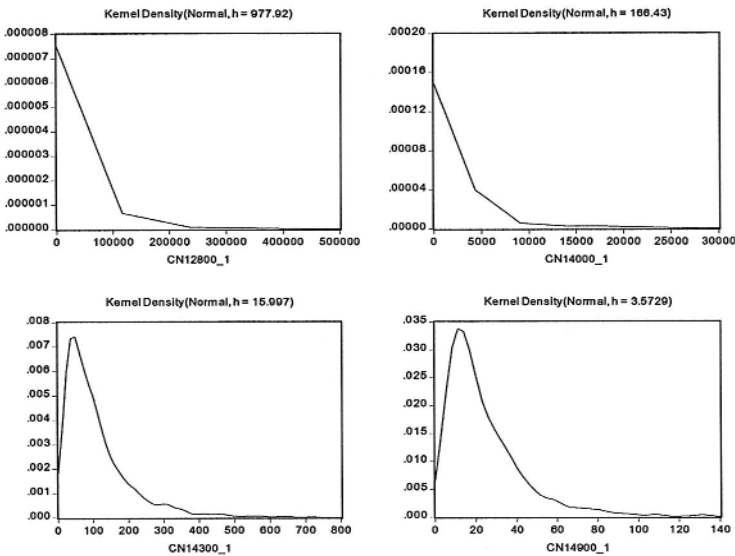
- Precios neutrales o de referencia y subjetivos de opciones: se estiman con la mediana²⁵ de las simulaciones de las distribuciones predictivas de los precios neutrales o de referencia y subjetivos de las opciones de compra (ecuaciones [13] y [15] respectivamente). Simulación de tamaño 1000.
- Fijación del nivel de aversión del inversor: se establece en el 95%. Los intervalos de confianza (centrados) al 95% para el subyacente se calculan partir de la distribución predictiva del mismo para los vencimientos 15/12, 19/01, 16/02 y 16/03 y las nueve expectativas (ecuación [16]). Simulación de tamaño 1000.
- Determinación de los precios hipotéticos: los extremos inferior y superior de los intervalos de confianza se redondean a la centena más próxima y los precios hipotéticos para cada vencimiento son los propios extremos del intervalo de confianza y los valores compendidos entre estos dos extremos con una separación de 100 puntos.
- Presupuesto total disponible: 250.000 s .
- Volumen máximo de opciones negociadas: fijado de forma constante para todo el período de inversión en 10 contratos de cada tipo.
- No se consideran costes de transacción directos ni garantías.
- Rodaje: en caso de infactibilidad se mantiene la cartera óptima de la etapa anterior.
- Resumen de resultados para cada expectativa: la cartera óptima de cada etapa, los beneficios estimados de la cartera óptima activa (formada por contratos aún no vencidos) en cada etapa, los resultados totales (basados en el precio al contado de cierre del subyacente en la fecha de vencimiento) a vencimiento de la cartera óptima en cada etapa y los resultados totales netos a vencimiento de la cartera óptima en cada etapa descontando la inversión estimada (a precios neutrales de la fecha en la que se va produciendo) realizada hasta dicha etapa.

²⁵Estimador Bayes que minimiza el valor esperado del error absoluto para la correspondiente distribución predictiva.

Al predecir los precios de mercado de las opciones mediante los precios neutrales o de referencia solucionamos el problema de la dependencia de la solución óptima de nuestro problema a un dato desconocido en el instante de la decisión y en muchas ocasiones no disponible ni siquiera al final de la sesión, con el coste de hacer depender la solución óptima de la precisión de nuestras predicciones. Para analizar este punto hemos realizado un estudio descriptivo de las distribuciones simuladas de los precios de referencia de una selección de opciones de compra para el 20/11/06 (Gráficos²⁶ 4 y 5, y Cuadro 3) y hemos calculado tres medidas de los errores de predicción cometidos al estimar los precios de cruce de las opciones de compra usando los precios neutrales o de referencia: raíz del error cuadrático medio, error absoluto medio y coeficiente de Theil²⁷ para la totalidad del período de inversión (Cuadro 4).

GRÁFICO 4

Representación comparativa de la función de densidad predictiva del precio neutral o de referencia del día 20/11/2006 para opciones de compra con varios ejercicios

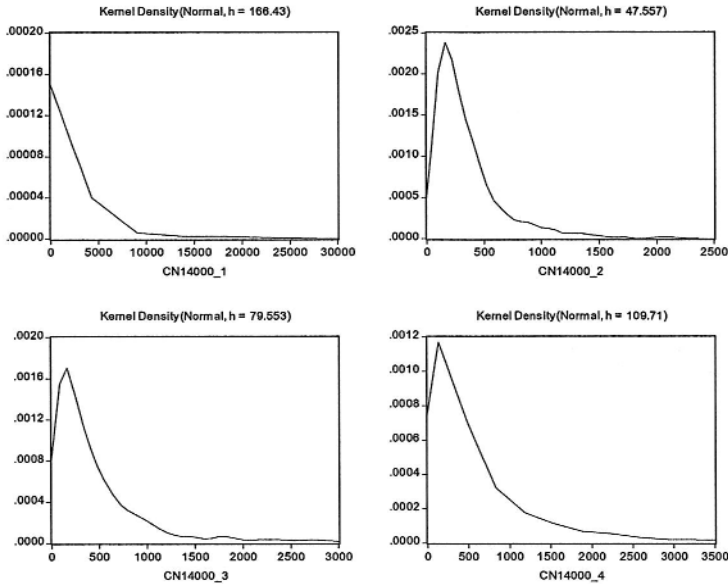


²⁶ Las estimaciones no paramétricas de las densidades predictivas presentadas en este artículo se han realizado usando la función de kernel normal y el parámetro de suavizado definido por $h=0.9kN^{-1/5} \min(s, R/1.34)$ donde N=número de observaciones, s=desviación estándar, R=rango intercuantílico de la serie (Silverman (1986), ecuación 3.31), y k=transformación canónica con el objeto de obtener un valor de suavizado similar entre las distintas funciones kernel (Marron y Nolan (1989)).

²⁷ Para una muestra de tamaño h si denotamos con \hat{y}_t a la predicción las medidas propuestas se calculan con las siguientes fórmulas: $RMSE = \sqrt{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2 / h}$ (raíz del error cuadrático medio), $MAE = \sum |y_t - \hat{y}_t| / h$ (error absoluto medio), y $U = \sqrt{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2 / h} / \sqrt{\sum y_t^2 / h}$ (coeficiente de Theil).

GRÁFICO 5

Representación comparativa de la función de densidad predictiva del precio neutral o de referencia del día 20/11/2006 para opciones de compra con varios vencimientos



CUADRO 3

Estadísticos descriptivos de la distribución predictiva de los precios neutrales o de referencia del día 20/11/2006 para varios contratos de opciones

	CN12800_1	CN14000_1	CN14000_2	CN14000_3	CN14000_4	CN_14300_1	CN_14900_1
Media	36876.68	3041.810	363.4167	531.2802	783.5603	112.2050	25.52145
Mediana	975.3392	166.6391	259.8587	306.6002	349.4408	82.31209	18.36485
Máximo	11710822	463827.6	5730.442	7546.919	34073.78	1166.961	273.0274
Mínimo	0.761927	0.040088	19.15000	10.72344	7.778404	7.490634	1.253961
Desv. Est.	418823.1	18929.89	374.9888	710.5832	1690.601	106.6498	24.59117
Asimetría	23.46745	17.33695	5.124314	3.748896	10.57512	3.189064	4.001143
Curtosis	621.2933	377.2886	55.26700	23.77669	172.4165	21.06765	30.25731
Jarque-Bera Test	16020398**	5887261**	118203.1**	20328.66**	1214553**	15296.69**	33624.90**

Nivel de significatividad del contraste: 5% (*) y 1% (**)

El estudio descriptivo de las distribuciones de los precios neutrales o de referencia para los contratos y fechas señaladas ilustra, en conformidad con las observaciones de la literatura previa (p.e. Bookstaber y Clarke (1985)): la ausencia de normalidad (se rechaza la hipótesis de normalidad para cualquier nivel de significatividad), asimetría positiva y colas muy pesadas a la derecha y leptocurtosis muy alta. Además, observamos que el aumento del ejercicio (comparemos para un mismo vencimiento (1: las distribuciones de las opciones con ejercicio 12.800, 14.000, 14.300 y 14.900 –CN12800_1, CN14000_1, CN14300_1 y CN14900_1-), supone una reducción en la desviación

estándar, la asimetría y la curtosis. Y que los parámetros de asimetría y curtosis también se reducen para los tres próximos vencimientos (compárense las distribuciones de opciones con ejercicio 14.000 para los cuatro vencimientos próximos -CN14000_1, CN14000_2, CN14000_3 y CN14000_4-). El precio neutral o de referencia de las opciones de compra disminuye con el ejercicio, tal y como debíamos esperar ya que un aumento del ejercicio supone una disminución de la cuantía en la que el precio del subyacente excede el precio de ejercicio, a la vez que aumenta la precisión de las estimaciones. Y aumenta con el tiempo hasta vencimiento porque aunque no podemos ejercer la opción hasta el final (nuestras opciones son europeas) disponemos más tiempo para venderla y poder aprovechar una subida del subyacente.

CUADRO 4
Medidas del error de predicción cometido al estimar los precios de mercado mediante los precios neutrales o de referencia

	C12800_1	C13400_1	C13700_1	C14000_1	C14300_1	C14600_1	C14900_1
RMSE	716.6762	110.5893	225.4351	143.8102	53.62882	25.48529	8
MAE	581.1667	104	174.8	111.6842	47.55	22.33333	8
Theil U	0.529237	0.271102	0.504359	0.593509	0.631956	0.938021	0.8
Obs.	6	4	10	19	20	12	1
% Obs. Disp.	30.00%	20.00%	50.00%	95.00%	100.00%	60.00%	5.00%
	C12800_2	C13400_2	C13700_2	C14000_2	C14300_2	C14600_2	C14900_2
RMSE	1200.253	471.8591	186.8092	170.815	63.36345	39.76995	31.74527
MAE	1177.667	449	172	143.9394	53.07317	34.72973	29.7619
Theil U	0.815832	0.534492	0.385224	0.523778	0.407545	0.686673	1.279449
Obs.	3	3	13	33	41	37	21
% Obs. Disp.	7.14%	7.14%	30.95%	78.57%	97.62%	88.10%	50.00%
	C12800_3	C13700_3	C14000_3	C14300_3	C14600_3	C14900_3	C15500_3
RMSE	1333.258	569.5501	230.6259	176.2193	108.5635	23.59059	17.06458
MAE	1266	516.6667	207.2353	143.7273	79.91892	20.12903	16.8
Theil U	0.771162	0.76375	0.53224	0.612705	0.659677	0.485638	2.072435
Obs.	5	3	17	33	37	31	5
% Obs. Disp.	8.06%	4.84%	27.42%	53.23%	59.68%	50.00%	8.06%
	C12800_4	C13400_4	C13700_4	C14000_4	C14300_4	C14600_4	C14900_4
RMSE	963.509	598.5765	446.661	277.15	173.6622	107.7541	55.56412
MAE	806	474.6	368.931	220.451	137.1186	81.68254	46.4
Theil U	0.592689	0.582227	0.604418	0.524172	0.470895	0.427909	0.351015
Obs.	4	5	29	51	59	63	35
% Obs. Disp.	4.88%	6.10%	35.37%	62.20%	71.95%	76.83%	42.68%
	C15500_4	C_ATM	C_ITM	C_LONG	C_OUT		
RMSE	53.72313	44.41651	412.672	234.2409	43.69696		
MAE	49.625	35.68595	274.4959	137.6986	41.06061		
Theil U	2.083607	0.518412	0.714097	0.525075	2.755966		
Obs.	40	121	121	365	33		
% Obs. Disp.	48.78%	90.98%	32.70%	36.79%	21.57%		

RMSE=Raíz del error cuadrático medio, MAE=error absoluto medio, Theil U=coeficiente de Theil, Obs=número de precios de mercado disponibles de cada contrato y % Obs. Disp=porcentaje de precios disponibles de cada contrato sobre el total de contratos de opciones de compra de cada tipo considerados para diseñar la estrategia dinámica de inversión óptima.

Los resultados presentados en el Cuadro 4 por contrato de opción de compra revelan la falta de liquidez de nuestro mercado de derivados; el porcentaje de observaciones de cruce disponibles es menor del 30% para el 40.62% de los contratos considerados incluidos tres contratos para los que no tenemos ningún precio de cruce las opciones con ejercicio 15.500 y vencimientos 15/12 y 19/01 y con ejercicio 13.400 y vencimiento 16/02. Y, por tanto, la necesidad de un procedimiento para estimar un precio de referencia para negociar la compra o venta de las opciones implicadas en nuestra estrategia de inversión. En relación al error de predicción cometido los resultados no son tan buenos como desearíamos, los errores en términos absolutos (error absoluto medio) son bastante altos, mayores de 100 s , para aproximadamente la mitad de las opciones consideradas, disminuyen al aumentar el precio de ejercicio y aumentan con el plazo hasta vencimiento. En términos relativos (coeficiente de Theil) los resultados no son tan malos indicando que estos errores absolutos se deben sobretodo a la variabilidad en el propio precio de cruce que a su vez puede deberse a la escasa negociación del contrato en cuestión. Los menores errores absolutos y relativos se producen en las predicciones de contratos *at the money* con vencimiento igual o inferior al mes.

4.3 Precios subjetivos y carteras de inversión óptimas

Introduzcamos ahora en el análisis las expectativas de los inversores y analicemos las carteras dinámicas óptimas que resultan al aplicar estas expectativas. Las expectativas iniciales del inversor en tendencia y volatilidad sobre el precio del subyacente y cómo se combinan éstas con la información histórica de los precios en los mercados al contado y de derivados van a ser elementos fundamentales en la elección de la estrategia de inversión inicial y la evolución futura de la cartera de inversión óptima. En esta subsección analizaremos el efecto de las expectativas de los inversores en el precio subjetivo de una opción de compra y en las características de las carteras de inversión óptima. En relación a éstas últimas, estudiaremos en qué medida estas carteras se aproximan a las estrategias recomendadas por los analistas de mercado en función del perfil del inversor (p.e. Hull (2006), pp. 223-40). Revisando brevemente estas recomendaciones, un inversor bajista tomará una posición inicial básica de compra en opciones de venta o de venta en opciones de compra, pero para protegerse de la intensidad en el cambio del subyacente se decantará si piensa que la volatilidad

baja por la venta de una opción de compra o un *ratio call spread*, si no sabe si va a bajar o subir por un *spread* bajista y si piensa que la volatilidad va a subir por la compra de un opción de venta o un *put ratio back-spread*. Siguiendo el mismo razonamiento, un inversor alcista iniciará su posición con la venta de una opción de venta o un *ratio put spread* si opina que la volatilidad esta bajando, un *spread* alcista si no sabe si la volatilidad va a subir o bajar, o la compra de una opción de compra o un *call ratio back-spread* si opina que la volatilidad está subiendo. Y los inversores indecisos sobre la evolución futura de los precios del subyacente optarán por un cono o cuna vendidos si piensan que va a bajar la volatilidad, o un cono o cuna comprados si opinan que la volatilidad va a subir.

Comencemos por estudiar las características de las distribuciones de los precios subjetivos para cada una de las nueve expectativas consideradas a partir de los precios simulados para el 20/11/06 de una selección de contratos sobre opciones de compra (Gráficos 6 a 8 y Cuadro 5).

GRÁFICO 6
 Representación comparativa de la función de densidad predictiva del precio subjetivo asociado a la expectativa indecisa-media del día 20/11/2006 para opciones de compra con varios ejercicios

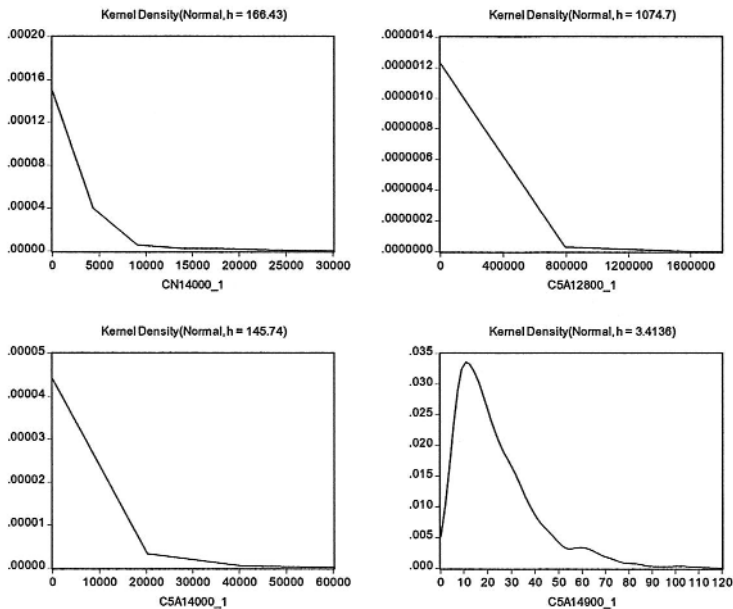
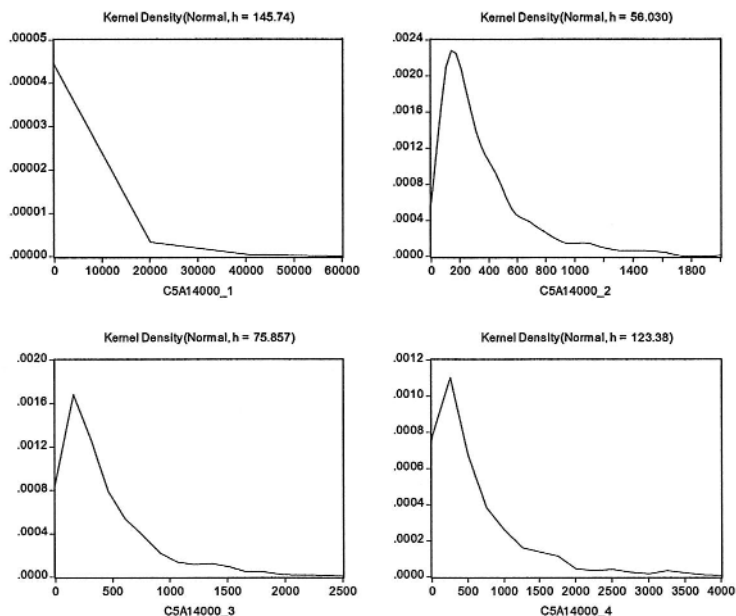


GRÁFICO 7

Representación comparativa de la función de densidad predictiva del precio subjetivo asociado a la expectativa indecisa-media del día 20/11/2006 para opciones de compra con varios vencimientos



CUADRO 5

Estadísticos descriptivos de la distribución predictiva de los precios subjetivos del día 20/11/2006 para varios contratos de opciones y expectativas del inversor

	C1A14000_1	C2A14000_1	C3A14000_1	C4A14000_1	C5A12800_1	C5A14000_1	C5A14000_2
Media	40113.99	2471.563	1811.415	16081.74	106096.9	5270.453	381.1490
Mediana	123.9357	179.8654	162.7206	152.0009	1090.083	140.0400	261.4968
Máximo	18365728	249169.5	104315.1	2862448.	78866405	2026346.	3209.709
Mínimo	0.003372	0.075196	0.137317	0.001457	1.190594	0.047671	10.51852
Dev. Est.	695562.0	13774.48	7703.367	139515.0	2511074.	67793.62	378.3999
Asimetría	23.37489	13.53503	8.535608	16.44281	30.94977	27.09253	2.706276
Curtosis	569.4386	219.1385	86.70343	305.8399	969.9216	794.7981	13.76150
Jarque-BeraTest	13459927**	1977026**	304070.4**	3866395**	39115372**	26245013**	6046.068**
	C5A14000_3	C5A14000_4	C5A14900_1	C6A14000_1	C7A14000_1	C8A14000_1	C9A14000_1
Media	512.7041	783.4854	24.10456	1226.901	10913.52	2249.303	1266.065
Mediana	297.8370	370.9944	19.18401	171.7089	150.6366	148.5203	151.3588
Máximo	14610.43	24256.58	162.7588	90488.53	932101.4	214124.5	164211.1
Mínimo	13.25332	6.801120	1.872186	0.276473	0.008304	0.093015	0.422072
Dev. Est.	809.1215	1453.947	18.68402	4422.095	58427.88	9593.061	6305.005
Asimetría	8.224770	7.783729	2.189243	11.14226	8.965494	13.16741	18.61280
Curtosis	115.2616	96.68375	11.24215	185.2707	101.3719	253.3631	453.7871
Jarque-BeraTest	536385.5**	375791.3**	3629.344**	1404967**	416606.6**	2640634**	8524782**

Nivel de significatividad del contraste: 5% (*) y 1% (**)

GRÁFICO 8
Representación comparativa de la función de densidad predictiva del precio subjetivo asociado a varias expectativas del día 20/11/2006 para opciones de compra con ejercicio 14000 y vencimiento inferior al mes

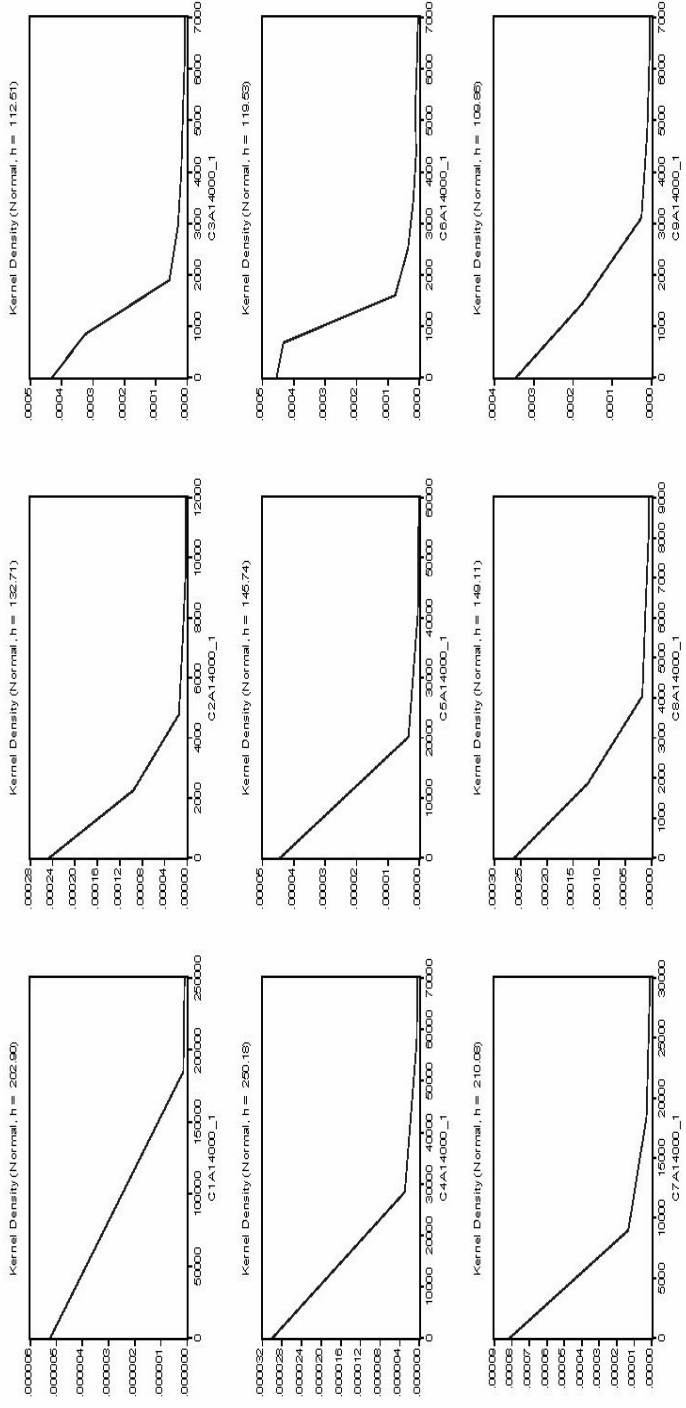
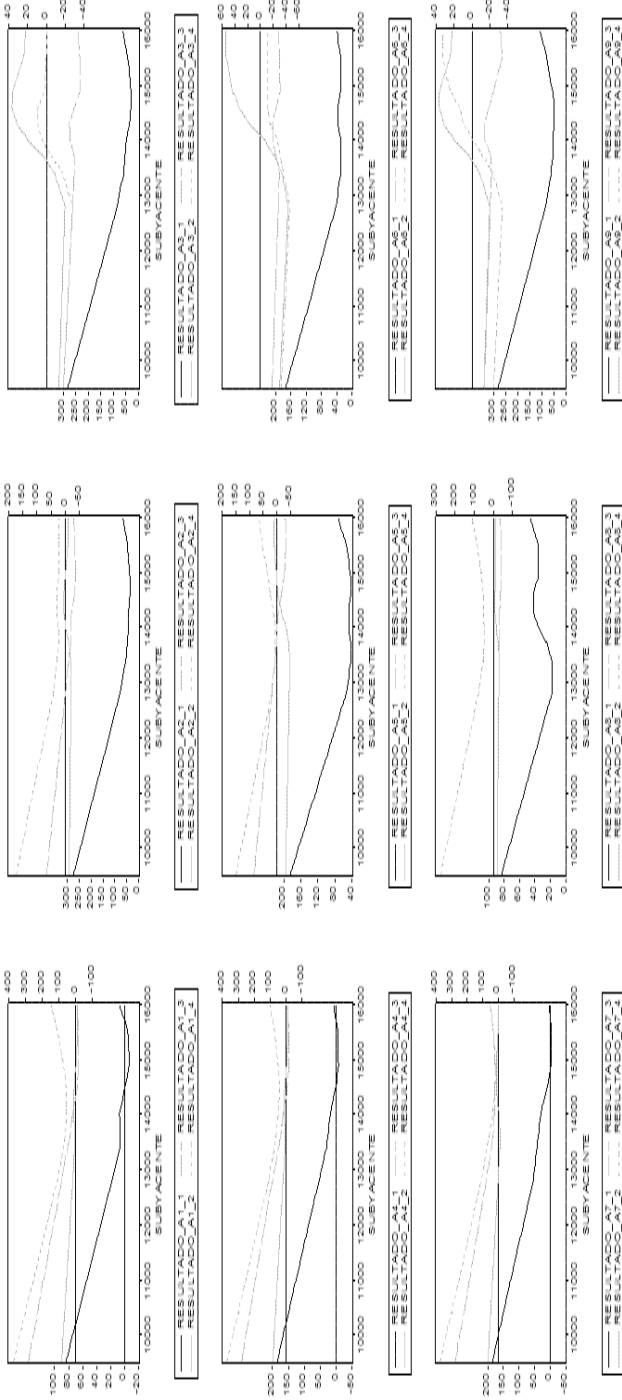


GRÁFICO 9
Gráficas de resultados a vencimiento de las nueve carteras de opciones óptimas a 20/11/2006



Resultados (en miles) de la cartera óptima por vencimiento y expectativa: Tendencia decreciente y volatilidad baja (RESULTADO_A1_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses), tendencia decreciente y volatilidad media (RESULTADO_A2_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses), tendencia decreciente y volatilidad baja (RESULTADO_A3_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses), indeciso en tendencia y volatilidad baja (RESULTADO_A4_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses), indeciso en tendencia y volatilidad media (RESULTADO_A5_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses), indeciso en tendencia y volatilidad baja (RESULTADO_A6_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses), tendencia creciente y volatilidad baja (RESULTADO_A7_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses), tendencia creciente y volatilidad media (RESULTADO_A8_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses) y tendencia creciente y volatilidad baja (RESULTADO_A9_1_2_3 y 4 para los vencimientos a 1, 2, 3 y 4 meses). Vencimiento a un mes (Eje izdo.), vencimientos a 2, 3 y 4 meses (Eje dcho.)

Del análisis de estos resultados se desprenden, a nivel general, las mismas observaciones que hacíamos en la sección anterior en relación a la distribución de los precios neutrales o de referencia: la ausencia de normalidad (se rechaza la hipótesis de normalidad para cualquier nivel de significatividad), asimetría positiva y colas muy pesadas a la derecha y leptocurtosis muy alta. Y además, también observamos que al aumentar el ejercicio (comparemos para la expectativa intermedia (5) y para un mismo vencimiento (1: próximo vencimiento las distribuciones de las opciones con ejercicio 12.800, 14.000 y 14.900 –C5A12800_1, C5A14000_1 y C5A14900_1-), se reduce la desviación estándar, la asimetría y la curtosis. Como ya sucedía al comparar las distribuciones de los precios neutrales o de referencia, y por las mismas justificaciones económicas, el precio subjetivo de las opciones de compra disminuye con el ejercicio a la vez que aumenta la precisión de las estimaciones; y aumenta con el tiempo hasta vencimiento (comparemos para la expectativa intermedia (5) las distribuciones de las opciones con ejercicio 14.000 para los cuatro vencimientos próximos –C5A14000_1, C5A14000_2, C5A14000_3 y C5A14000_4-). Las distribuciones de los precios neutral o de referencia y subjetivos para la expectativa intermedia (indeciso en tendencia y volatilidad media) de las opciones de compra (véanse C5A12800_1 y CN12800_1, C5A14000_1 y CN14000_1 y C5A14900_1 y CN14900_1) son bastante similares. No obstante, los estadísticos media, desviación estándar, asimetría y curtosis son más altos en las distribuciones subjetivas que en las neutrales para los ejercicios más bajos, revertiendo la situación en los ejercicios altos; lo que se traduce en precios subjetivos más altos que los neutrales en las opciones de compra *out of the money*, y en precios subjetivos más bajos en las opciones de compra *in the money*. En consecuencia, dado que los errores de predicción al estimar las opciones de compra *in the money* proceden en el 93.38% de los casos de la infravaloración del precio de cruce y los que se producen al estimar las opciones de compra *out of the money* en el 96.97% de la sobrevaloración del precio de cruce, la estimación del precio de mercado a partir de la distribución subjetiva intermedia produce peores resultados que la propuesta de este artículo basada en precios neutrales.

Los resultados al comparar los precios subjetivos (tomando como referencia el contrato de ejercicio 14000 y el vencimiento más próximo - C1A14000_1, C2A14000_1, C3A14000_1, C4A14000_1, C5A14000_1, C6A14000_1, C7A14000_1, C8A14000_1 y C9A14000_1-) permiten establecer las siguientes relaciones: a) las expectativas de crecimiento

en volatilidad en el mercado a contado se traducen a una reducción en las volatilidades en los precios de las opciones de compra; b) para expectativas de volatilidad bajas, las expectativas de crecimiento del subyacente se traducen en aumentos del precio subjetivo de las opciones de compra y las de decrecimiento en disminuciones; tal y como debíamos esperar ya que al aumentar el precio del subyacente aumentan las posibilidades de obtener un beneficio ejerciendo la opción de compra y una volatilidad relativamente alta podría poner en riesgo estos posibles beneficios; y c) las expectativas de crecimiento en volatilidad en el mercado al contado se traducen en aumentos del precio subjetivo de la opción de compra y las expectativas de decrecimiento en disminuciones; la razón económica es evidente, cuando aumenta la volatilidad aumenta la posibilidad de que se gane mucho o muy poco ejerciendo la opción de compra pero como los riesgos de pérdida están limitados por el propio precio de la opción de compra, ésta aumentará ante la expectativa de una gran ganancia.

En relación a los resultados de los problemas de optimización dinámica resueltos, comenzaremos por estudiar las carteras óptimas iniciales a 20/11/2006. Para hacer este estudio presentamos las gráficas de resultados de las carteras óptimas iniciales en función de los posibles valores del subyacente por vencimiento y expectativa (Gráfico 9) y realizamos un estudio descriptivo de la distribución subjetiva de las carteras para las nueve expectativas consideradas (Cuadro 6 y Gráfico 10). El estudio de las gráficas de resultados en función del precio del subyacente por vencimiento y expectativa nos permite comprobar que las carteras óptimas obtenidas no se corresponden a las estrategias de inversión *puras* (*call*, *put*, *ratios call* y *put*, *spreads*, *cunas*, *conos*, *mariposas*, etc.) descritas en los manuales sobre negociación en opciones (p.e. Hull (2006), pp. 223-40); y son mucho más complejas que estas porque la valoración subjetiva de cada contrato combina la información sobre las expectativas del inversor sobre el subyacente con la información histórica de los mercados de derivados y al contado, y las carteras se diseñan para obtener beneficios a partir de la diferencia entre lo que cada inversor estima que vale su posición frente al precio que estima le otorga el mercado combinando posiciones en varios vencimientos para garantizar resultados (brutos) positivos a vencimiento. No obstante, es fácil observar que las estrategias óptimas para los cuatro vencimientos y una expectativa de volatilidad dada son bastante similares para las tres expectativas sobre tendencia.

- La estrategia óptima para el primer vencimiento, común para las tres expectativas de volatilidad, es una variante de la estrategia *cuna comprada* que se protege en las expectativas de volatilidad media y alta frente a pérdidas para precios del subyacente comprendidos en el intervalo aproximado [14.500,15.700].
- Las estrategias óptimas para el segundo vencimiento son una variante de la estrategia *put ratio back-spread* para una expectativa sobre la volatilidad baja, una variante de la estrategia *cuna vendida* para una expectativa sobre la volatilidad media, y una variante de la estrategia *spread alcista* para una expectativa sobre la volatilidad alta.
- Las estrategias óptimas para el tercer vencimiento son una variante de la estrategia *put comprada* para expectativas de volatilidad baja y media y de tendencia decreciente e indecisa, una variante de la estrategia *cuna comprada* para expectativas de volatilidad baja y tendencia creciente, una variante de la estrategia *box* con pérdidas para expectativas de volatilidad media y tendencia creciente, y una variante de la estrategia *box* con pérdidas para expectativas de volatilidad alta.
- Las estrategias óptimas para el cuarto vencimiento son una variante de la estrategia *cuna comprada* con beneficios para expectativas de volatilidad baja y media, una variante de la estrategia *mariposa comprada* para expectativas de volatilidad alta y tendencia decreciente, una variante de la estrategia *box* con pérdidas para expectativas de volatilidad alta e indeciso en tendencia, y una variante de la estrategia *spread alcista* para expectativas de volatilidad alta y tendencia creciente.

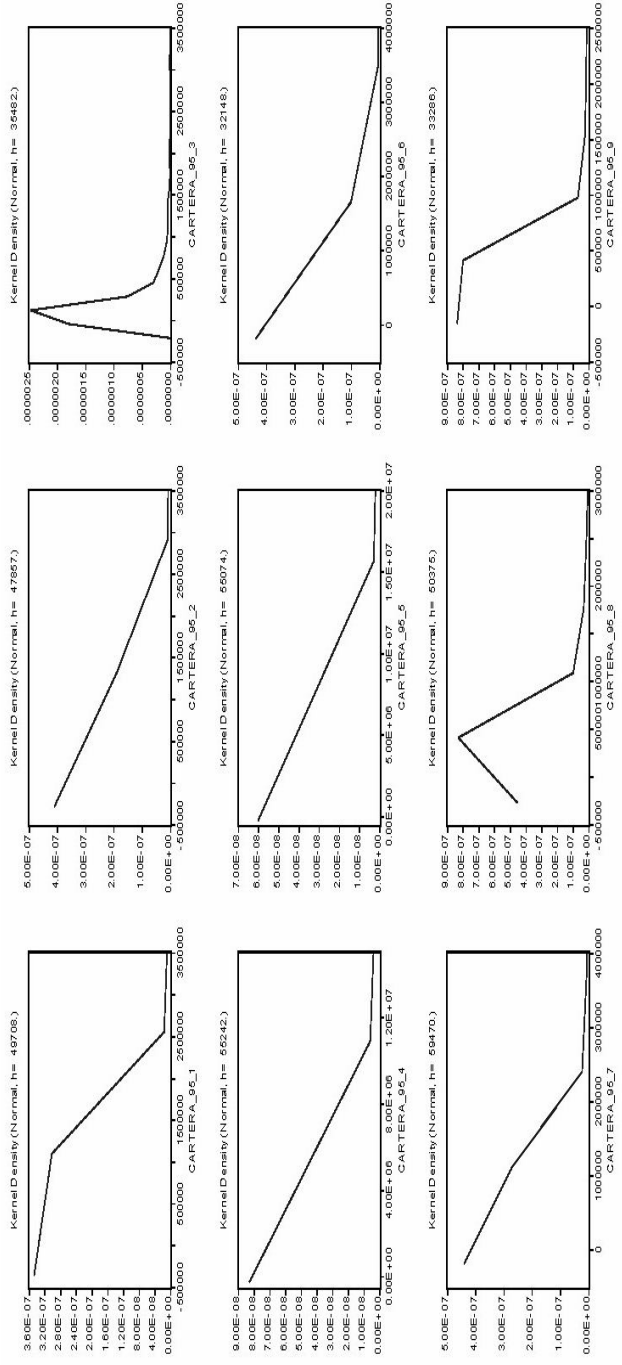
Aunque las estrategias seguidas para cada vencimiento no se corresponden con las recomendaciones habituales de los analistas que hemos revisado al principio de esta subsección, responden a un razonamiento económico en el que se combina la información histórica con las expectativas particulares del inversor sobre la evolución del precio del subyacente. La estrategia óptima para el primer vencimiento viene determinada por la información histórica sobre la tendencia indecisacreciente del subyacente en los dos subperiodos anteriores (Cuadro 2); de ahí la estrategia común de *cuna comprada* para todas las expectativas, recomendada en posiciones indecisas respecto a tendencia,

matizada para expectativas de volatilidad medias y altas para evitar pérdidas en caso de una mayor movimiento en el precio del subyacente. En cambio, las estrategias óptimas para el segundo vencimiento son consecuencia de las expectativas de volatilidad del inversor y pueden verse como una compensación, mediante una estrategia de calendario, de la estrategia común para el primer vencimiento; esta compensación pretende mejorar el resultado ante movimientos al alza de los precios que se consideran más probables cuanto mayor es la expectativa de volatilidad desde el punto de vista del inversor. Finalmente, en las estrategias óptimas para el tercer y cuarto vencimiento influirían sobre todo las expectativas en tendencia y volatilidad del inversor; nótese que cinco de las ocho variantes se corresponderían con las recomendaciones técnicas de posicionamiento de acuerdo con las expectativas sobre la evolución del subyacente en tendencia o volatilidad.

En relación a las distribuciones de probabilidad para el valor de las carteras óptimas de opciones iniciales (Cuadro 6 y Gráfico 10), nuestra metodología ha generado distribuciones muy alejadas de la hipótesis de normalidad con asimetría positiva (a la derecha) y leptocúrticas, esto es, distribuciones que comparten rasgos con las obtenidas aplicando técnicas de simulación por Bookstaber y Clarke (1985). Respecto a los resultados económicos obtenidos con la cartera óptima inicial, exceptuando el caso de expectativas indecisas en tendencia y volatilidad alta todas las carteras óptimas iniciales se obtienen invirtiendo una cantidad (estimada a precios neutrales) positiva del presupuesto disponible (88.770, 35.288, 22.448, 88.272, 19.673, -23.679, 84.842, 34.799 y 39.872 \$ respectivamente para las expectativas 1 a 9), y el valor subjetivo neto de la cartera a 22/11/2006 para las nueve expectativas es significativamente mayor que la inversión estimada realizada para un nivel de significatividad del 5%. Además, los resultados netos a vencimiento son positivos para expectativas de tendencia creciente y volatilidad media (6.879'7 \$), expectativas de tendencia decreciente y volatilidad alta (13.353'2 \$), expectativas indeciso en tendencia y volatilidad alta (25.527 \$), y expectativas de tendencia creciente y volatilidad alta (15.534'8 \$); esto es, obtiene beneficios, manteniendo sin cambios las carteras óptimas iniciales hasta el vencimiento de todos los contratos (y hay contratos que vencen dentro de cuatro meses), en los casos en los que el inversor *acierta* en sus previsiones sobre la evolución del subyacente. Obsérvese que el período del 20/11/2006 al 16/03/2007 (Cuadro 2 y Gráfico 3) podría calificarse como un período de volatilidad media en el que se produce un repunte positivo

en los precios, o simplemente como un período en el que aumenta la volatilidad respecto a períodos anteriores.

GRÁFICO 10
Representación de la función de densidad predictiva del valor de la cartera de opciones óptima a 20/11/2006 para las nueve expectativas



Expectativas: Tendencia decreciente y volatilidad baja (cartera_95_1), tendencia decreciente y volatilidad media (cartera_95_2), tendencia decreciente y volatilidad baja (cartera_95_3), índice en tendencia y volatilidad baja (cartera_95_4), índice en tendencia y volatilidad media (cartera_95_5), índice en tendencia y volatilidad baja (cartera_95_6), tendencia creciente y volatilidad baja (cartera_95_7), tendencia creciente y volatilidad media (cartera_95_8) y tendencia creciente y volatilidad baja (cartera_95_9).

CUADRO 6
Estadísticos descriptivos de la distribución predictiva de las
carteras óptimas a 20/11/2006

		Volatilidad			
		Baja	Media	Alta	
Tendencia	Decreciente	Media	1103802.	898462.8	342365.1
		Mediana	257241.1	128460.9	92921.99
		Máximo	1.44E+08	1.58E+08	16074853
		Mínimo	-256857.1	-179854.2	-135477.0
		Desv. Est.	6563470.	6650599.	1165574.
		Asimetría	15.03339	18.73276	9.644018
		Curtosis	277.3633	399.4335	116.2544
		Jarque-Bera Test	3174134.**	6606799.**	549941.3**
		Wilcoxon Test (median=inversión)	26.66171**	22.60536**	21.52715**
		Tendencia	Indecisa	Media	2949478.
Mediana	253637.2			135205.5	58112.88
Máximo	1.11E+09			1.58E+09	1.82E+08
Mínimo	-125404.7			-117265.6	-112163.0
Desv. Est.	41434718			50237523	5789807.
Asimetría	23.06117			30.90851	30.71875
Curtosis	568.2248			968.1743	961.3357
Jarque-Bera Test	13400266**			38974283**	38424246**
Wilcoxon Test (median=inversión)	26.38827**			24.59943**	24.39452**
Tendencia	Creciente			Media	1598954.
		Mediana	243362.5	173432.6	101852.3
		Máximo	1.28E+08	66752509	55488471
		Mínimo	-58514.05	-162155.1	-80208.69
		Desv. Est.	8939751.	3312423.	2054873.
		Asimetría	10.74914	13.92550	20.70215
		Curtosis	129.2242	233.3683	527.0531
		Jarque-Bera Test	683113.7**	2243551.**	11514415**
		Wilcoxon Test (median=inversión)	26.5274**	25.74824**	20.57176**

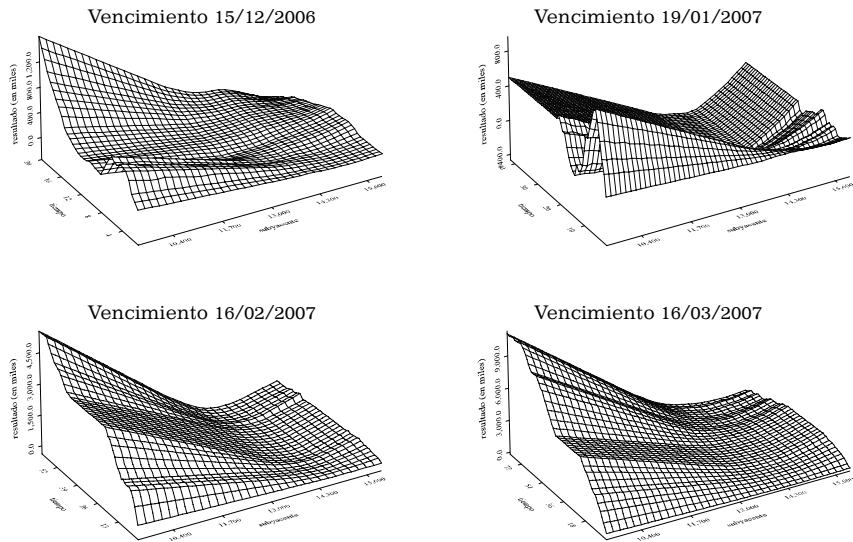
Nivel de significatividad de los contrastes: 5% (*) y 1% (**)

Estas carteras de opciones óptimas iniciales no son estáticas y en esta subsección también queremos ilustrar cómo cambia la cartera con el paso del tiempo y la incorporación de la información diaria de los mercados al contado y derivado. Para mostrar la evolución de la cartera de opciones óptima estudiamos el caso en el que el inversor no cambia de expectativa en todo el período de inversión y que, en caso de infactibilidad del problema de decisión, mantiene la cartera en opciones anterior (aunque esta ya no sea óptima) y evalúa su beneficio esperado en términos de sus estimaciones actuales para la etapa. Proponemos un doble análisis: el estudio de la cartera óptima de cada etapa a través de las gráficas de los resultados en función de los posibles precios

del subyacente y del tiempo transcurrido desde el inicio de la inversión por vencimiento y expectativa (Gráficos 11 a 15²⁸) y de los beneficios estimados y los resultados totales brutos y netos²⁹ a vencimiento por etapa para las nueve expectativas (Gráfica 16).

GRÁFICO 11

Gráficas de resultados a vencimiento de las carteras óptimas para cada vencimiento y la expectativa indeciso en tendencia y volatilidad baja en función de los posibles valores del subyacente y del tiempo transcurrido desde el inicio de la inversión



Del análisis de estos resultados podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Las carteras óptimas iniciales para los nueve modelos de expectativas consideradas evolucionan, como era de desear ya que así es como evoluciona el mercado al contado durante el período de inversión (Cuadro 2 y Gráfico 3) y nuestras carteras incorporan

²⁸ Los cuatro gráficos restantes de resultados a vencimientos en función del precio del subyacente y tiempo para expectativas en tendencia decreciente y volatilidad baja y tendencia creciente y volatilidad baja, y tendencia decreciente y volatilidad media y tendencia creciente y volatilidad media son muy similares a los gráficos presentados para expectativas indeciso en tendencia y volatilidad baja e indeciso en tendencia y volatilidad media respectivamente.

²⁹ Los resultados totales netos a vencimiento se obtienen restando la inversión realizada hasta esa etapa a precios neutrales o de referencia y, por lo tanto, contienen una parte estimada. En cambio, los resultados totales a vencimiento son reales.

información histórica con expectativas, a carteras óptimas finales compatibles con las recomendaciones de los analistas para una tendencia creciente-indecisa del índice acompañada por un aumento de la volatilidad. Las diferencias en resultados económicos se deben al camino recorrido, de acuerdo con las expectativas del inversor, para llegar a estas estrategias. Los dos episodios de caídas en el precio del índice acompañadas de un aumento de volatilidad (etapas 8 a 11 –del 29/11/06 al 04/12/06- y etapas 66 a 71 –del 22/02/07 al 01/03/07-) tienen también su reflejo en las gráficas de resultados de las carteras óptimas cercanas a la fecha.

- Desde ambas perspectivas de análisis (características y resultados de la cartera óptima), y con algunas matizaciones para la expectativa indeciso en tendencia y volatilidad alta, podemos hablar de tres tipos de estrategias óptimas de inversión: para volatilidad baja, media y alta.

GRÁFICO 12

Gráficas de resultados a vencimiento de las carteras óptimas para cada vencimiento y la expectativa indeciso en tendencia y volatilidad media en función de los posibles valores del subyacente y del tiempo transcurrido desde el inicio de la inversión

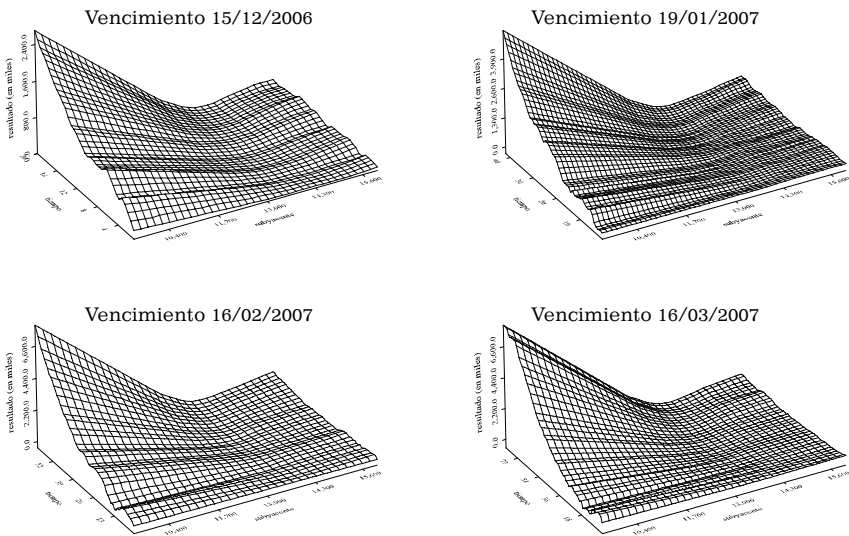


GRÁFICO 13

Gráficas de resultados a vencimiento de las carteras óptimas para cada vencimiento y la expectativa indeciso en tendencia y volatilidad alta en función de los posibles valores del subyacente y del tiempo transcurrido desde el inicio de la inversión

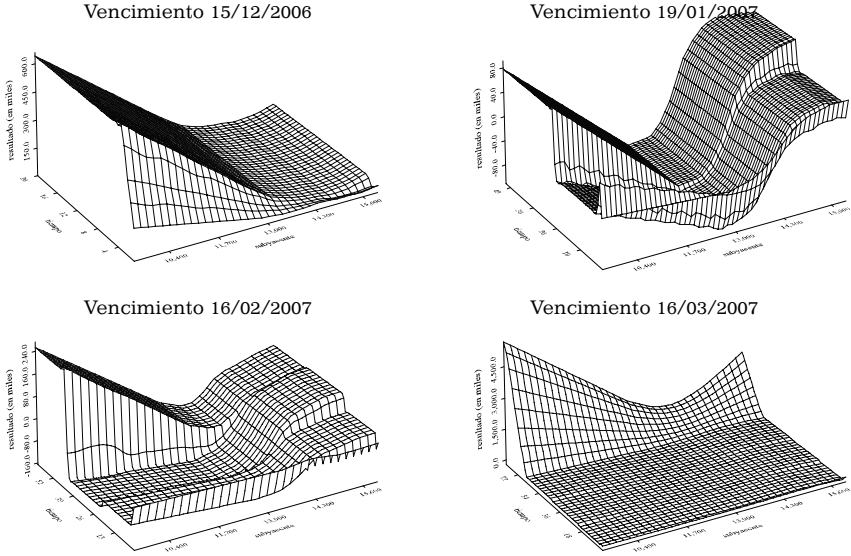


GRÁFICO 14

Gráficas de resultados a vencimiento de las carteras óptimas para cada vencimiento y la expectativa tendencia decreciente y volatilidad alta en función de los posibles valores del subyacente y del tiempo transcurrido desde el inicio de la inversión

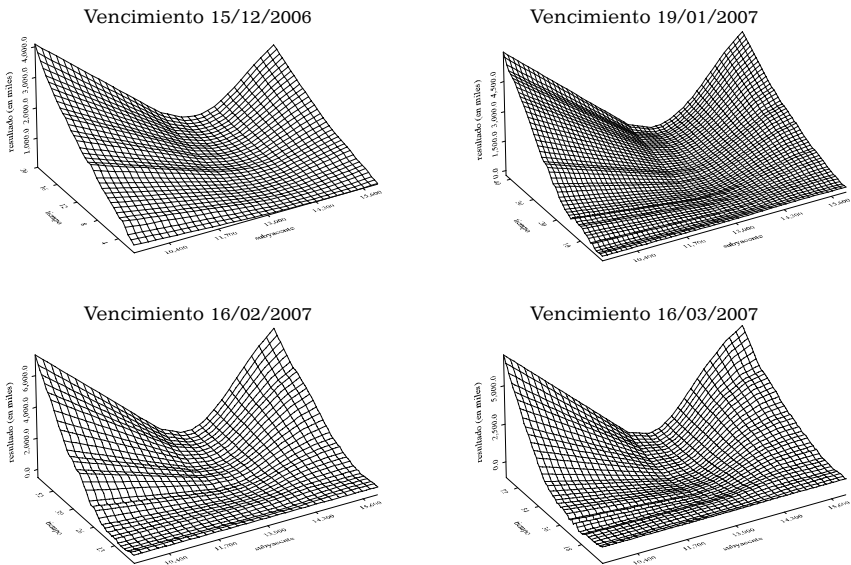
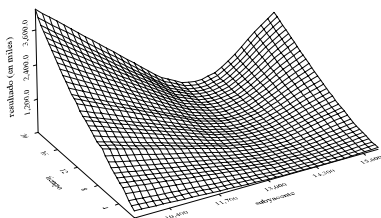


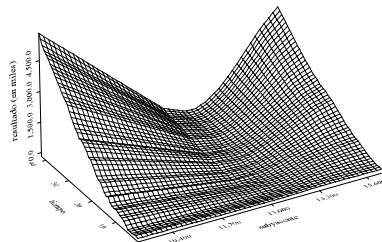
GRÁFICO 15

Gráficas de resultados a vencimiento de las carteras óptimas para cada vencimiento y la expectativa tendencia creciente y volatilidad alta en función de los posibles valores del subyacente y del tiempo transcurrido desde el inicio de la inversión

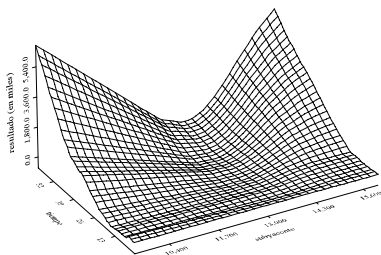
Vencimiento 15/12/2006



Vencimiento 19/01/2007



Vencimiento 16/02/2007



Vencimiento 16/03/2007

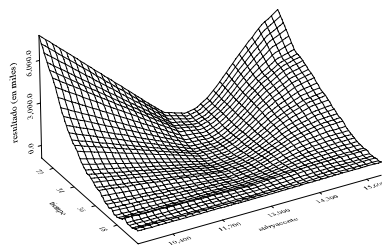
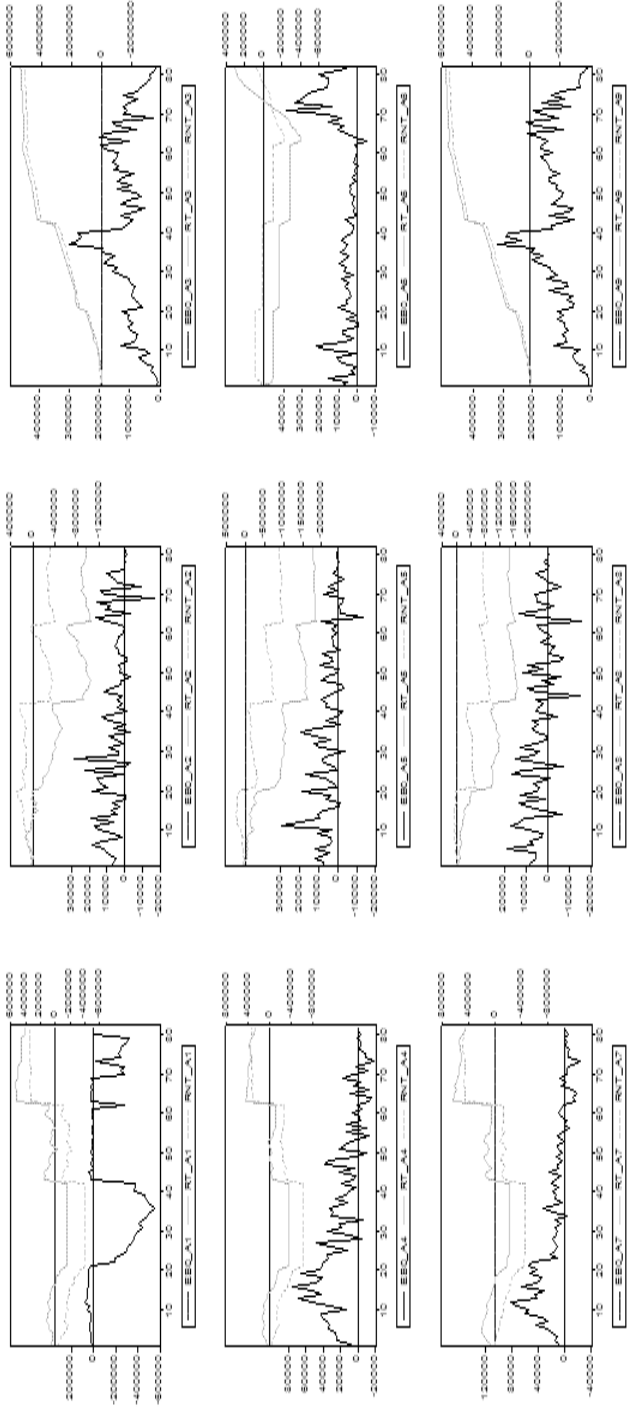


GRÁFICO 16
 Representación de los beneficios estimados y resultados totales por etapa para las nueve expectativas durante el periodo de inversión del 20/11/2006 al 16/03/2007



EB0=Beneficio estimado de la cartera óptima activa en cada etapa para cada expectativa, RT=Resultado total a vencimiento de la cartera óptima en cada etapa y para cada expectativa, y RTN=Resultado total neto a vencimiento de la cartera óptima en cada etapa descontando la inversión estimada realizada hasta dicha etapa para cada expectativa. Expectativas: Tendencia decreciente y volatilidad baja (*_A1), tendencia decreciente y volatilidad media (*_A2), tendencia decreciente y volatilidad baja (*_A3), índice en tendencia y volatilidad baja (*_A4), índice en tendencia y volatilidad media (*_A5), índice en tendencia y volatilidad baja (*_A6), tendencia creciente y volatilidad baja (*_A7), tendencia creciente y volatilidad media (*_A8) y tendencia creciente y volatilidad baja (*_A9).

- En la estrategia para volatilidad baja (Gráficos 11 y 16), el inversor se posiciona comprando en el mercado y gestiona a partir de ahí su cartera comprando y vendiendo opciones para garantizar resultados. En los cinco primeros días gasta casi la totalidad del presupuesto con un promedio de inversión diario de 49.785'4, 49.954'4 y 49.999'4 \$ y a partir de entonces busca un equilibrio de compras y ventas con promedios de inversión diaria de 595'06, -760'11 y -20'91 para expectativas de tendencia decrecientes, indecisas y crecientes respectivamente. El riesgo de la estrategia reside en el consumo del presupuesto disponible al principio del período de inversión y la necesidad de refinanciar el posicionamiento de la cartera mediante la venta de contratos y se traduce en soluciones infactibles del problema de optimización dinámica propuesto. Esta estrategia de continuo posicionamiento, que posiblemente se debe a que concuerdan la información inicial del período con las expectativas del inversor, hace muy visibles los efectos de los dos episodios de caídas en los rendimientos acompañados de aumentos de volatilidad en las carteras óptimas de la fecha para las tres expectativas sobre tendencia. Las carteras óptimas finales son variantes de las estrategias *put comprada* para el primer y cuarto vencimientos y *cuna comprada* para segundo y tercer vencimientos y obtienen resultados positivos totales a vencimiento en términos brutos (416.615'1, 281.711'3 y 458.542'4 \$) y netos (367.820'1, 344.040'3, 460.257'4 \$) para las tres expectativas de tendencia.
- En la estrategia para volatilidad media (Gráficos 12 y 16), se pretende obtener resultados mediante la venta, con un promedio de inversión diaria de -8.067'73, -10.612'71 y -8.816'43 \$ para expectativas de tendencia decrecientes, indecisas y crecientes respectivamente. La pieza fundamental de la estrategia es tener una buena estimación del precio de venta en el mercado, que nosotros estimamos con el precio neutral o de referencia. El inversor con expectativas de volatilidad media opta por una estrategia de especulación muy activa que requiere un mayor control del riesgo, y este control se puede implementar vigilando la serie de los beneficios estimados para la cartera óptima activa. Efectivamente, esta serie nos informa sobre nuestra capacidad para obtener beneficios y asegurar resultados a vencimiento según el nivel de confianza fijado. Los beneficios estimados caen por debajo del cero el 28/12/06, 11/12/06 y 7/12/06 respectivamente

para expectativas en tendencia decrecientes, indecisas y crecientes respectivamente y aunque se produce una recuperación la tasa de crecimiento es mucho menor que antes, en estos momentos nuestra capacidad para obtener beneficios se está deteriorando y ha llegado el momento de mantener la posición si es que realmente creemos en nuestras expectativas. Si hubiéramos mantenido la cartera óptima de estas fechas hasta vencimiento hubiéramos acabado el período de inversión con beneficios (resultados totales netos de 131.909'8, 230.013'2 y 64.151'5s para expectativas en tendencia decrecientes, indecisas y crecientes respectivamente); en cambio al reajustar la cartera y no asumir este riesgo adicional acabamos el período con resultados totales y totales netos negativos para las tres expectativas en tendencia. Las carteras óptimas finales son variantes de la estrategia *cuna comprada* para los cuatro vencimientos y obtienen resultados totales (-963.084'6, -1.760.587'3 y -1.451.077'1s) y totales netos (-301.530'6, -890.345'3 y -728.130'1s) a vencimiento negativos para las tres expectativas en tendencia.

- En la estrategia para volatilidad alta (Gráficos 13-15 y 16), el inversor una vez construida su cartera óptima inicial (inversión positiva para las expectativas sobre tendencia creciente y decreciente) se posiciona en el mercado vendiendo, reajustando su cartera a partir del séptimo día con inversiones acumuladas positivas hasta el final del período de inversión. La inversión acumulada durante los primeros seis días es de -130.166, -190.327 y -155.637 s y la inversión promedio de 3.047'88, 3.038'44 y 3.046'09 s para expectativas de tendencia decrecientes, indecisas y crecientes respectivamente. Esta estrategia tiene efectos especiales en el caso de la expectativa indeciso en tendencia ya que, en este caso, la cartera óptima inicial con estrategias del tipo *box* para los vencimientos a 3 y 4 meses conduce a una posición inicial de inversión negativa, y a la infactibilidad del problema de optimización dinámica (por incumplimiento de las restricciones sobre los resultados) a partir del cuarto día del período de inversión y en lo que resta del primer subperíodo de inversión, el segundo y tercer subperíodo de inversión con las únicas excepciones del día de negociación posterior al primer y segundo vencimiento, y los primeros dos días del cuarto subperíodo de inversión. El mantenimiento de la cartera óptima previa cuando el problema de optimización se vuelve infactible y su reajuste al recuperarse

la factibilidad (la estrategia que hemos seguido en el caso de volatilidad baja) permite la recuperación de las pérdidas durante el cuarto subperíodo de inversión y cerrar el período de inversión con una cartera óptima final con resultados brutos y netos a vencimiento positivos para esta expectativa. Las carteras óptimas finales son variantes de la estrategia *cuna comprada* para los cuatro vencimientos y obtienen resultados positivos totales a vencimiento en términos brutos (5.363.875'1, 320.140'6 y 5.795.369'8 s) y netos (5.113.949'1, 70.988'6 y 5.545.590'8 s) para las tres expectativas de tendencia.

- Los beneficios estimados en cada fecha para la cartera óptima activa proporcionan una medida de la capacidad de cada expectativa para generar resultados a vencimiento en las condiciones de aversión al riesgo fijadas previamente en el problema.

Es interesante señalar que la aplicación del problema de optimización dinámico propuesto conduce, en algunas ocasiones, a dos situaciones: infactibilidad del problema y factibilidad con beneficios estimados de la cartera óptima activa negativos, que requieren un control adicional y/o la reconsideración por parte del inversor de sus expectativas y de la cantidad de presupuesto que está dispuesto a comprometer.

5. Conclusiones

En este artículo se presenta un modelo de valoración de opciones que incorpora las expectativas del inversor sobre la evolución en tendencia y volatilidad del subyacente; se estiman, mediante un enfoque inferencial Bayesiano, el precio de las opciones desde un contexto de valoración neutral al riesgo (incorporando la información histórica de los precios de los mercados al contado y de derivados) y el precio de las opciones y precio del subyacente en el mercado al contado según las expectativas del inversor sobre la evolución del subyacente (incorporando la información histórica de los precios en los dos mercados y las expectativas del inversor); y en base a estos resultados se plantea un problema dinámico de programación lineal entera para obtener la cartera óptima dinámica en opciones según las expectativas del inversor. Finaliza el artículo con una aplicación en el mercado oficial español de futuros y opciones.

Este trabajo comparte objetivos y metodología con Font (2004) pero su contribución original adicional es fundamental. En primer lugar, re-

suelve dos simplificaciones del procedimiento estudiado en Font (2004): el conocimiento a priori de los precios de mercado, que en este trabajo se estiman a partir de los precios de referencia neutrales al riesgo de las opciones; y la aplicación del mecanismo de garantías del mercado para controlar el riesgo de la estrategia, que se sustituye por la exigencia de resultados positivos a vencimiento para cualquier valor del subyacente comprendido en un intervalo de confianza fijado de acuerdo con el nivel de aversión al riesgo del inversor. Y además, presenta la mejora adicional fundamental de incorporar la información contenida en los precios de las opciones y clarificar el mecanismo de transmisión de los precios entre los mercados al contado y derivado. Estas mejoras se trasladan al problema de obtener la cartera de inversión óptima de cada inversor al fijar como objetivo la maximización del beneficio, de acuerdo con sus expectativas, en el mercado derivado (donde está negociando durante el período de inversión), y usar los resultados del mercado al contado únicamente para controlar el riesgo de la estrategia a vencimiento (cuando el dato relevante es el precio del subyacente); y se potencian con la revisión de la cartera óptima actualizando las distribuciones con la nueva información muestral.

Las ventajas de nuestra aproximación frente a la sugerida por Korn y Wilmott (1998) son asimismo evidentes, citemos: la modelización de las expectativas del agente sobre tendencia y volatilidad del subyacente (y no sólo en tendencia); y la combinación en el proceso inferencial Bayesiano propuesto de los enfoques de modelización y estimación, que permite obtener una estimación (y no sólo un modelo que después requiere ser estimado) del precio subjetivo de las opciones que incorpora las expectativas iniciales del inversor junto a los resultados muestrales de los mercados al contado y de derivados. En relación a los trabajos previos sobre la obtención de carteras óptimas de opciones señalemos que este trabajo no se centra en una estrategia de cobertura sino en la obtención de una estrategia general de inversión óptima en el mercado de opciones; y que el planteamiento del problema de optimización dinámico propuesto, al introducir las restricciones de riesgo a través de los resultados posibles manteniendo la linealidad del problema, consigue aunar una interpretación más natural del riesgo con la posibilidad de contar con programas de resolución más potentes y rápidos para la resolución en tiempo razonable de problemas con un gran número de contratos.

Resumiendo, en relación a las ventajas de la metodología presentada subrayemos que: a) el modelo de valoración de opciones asumido admite diferencias de volatilidad entre los distintos contratos en función a su nivel de *moneyness* y /o al plazo hasta vencimiento y permite incorporar en la predicción final del precio los errores debidos a la predicción del precio teórico y al propio mercado: negociación infrecuente, asincronías entre los precios de los mercados al contado y de derivados, costes de transacción indirectos, . . . b) el proceso inferencial Bayesiano aplicado proporciona las distribuciones predictivas de los precios actuales y futuros neutrales al riesgo y subjetivos de opciones de compra y del precio futuro subjetivo del subyacente, esto es, una información muy completa sobre los dos mercados de interés; c) las estimaciones basadas en estas distribuciones combinan, empleando una técnica científicamente reconocida (estadística Bayesiana), la información del inversor sobre la evolución en tendencia y volatilidad de los precios del subyacente con la información histórica de los mercados al contado y de derivados; d) las distribuciones predictivas sobre el precio neutral al riesgo y subjetivo de una opción de compra permiten cuantificar, desde la perspectiva de cada inversor, si un contrato sobre un futuro u opción, está sobrevalorado o infravalorado en el mercado de derivados; e) el problema de programación propuesto permite obtener una cartera de opciones dinámica óptima que recoge las expectativas de cada inversor y puede corregirse fácilmente para incorporar los costes de transacción directos y garantías del inversor en la función objetivo y restricciones respectivamente; f) la aplicación de la metodología descrita en el mercado de futuros y opciones español confirma las características distribucionales descritas en la literatura para los precios de las opciones, ilustra que nuestro estimador de los precios de cruce para opciones de compra es necesario por la iliquidez del mercado de derivados español y produce predicciones razonables en opciones de compra *at the money*, y proporciona carteras de inversión en opciones óptimas que se basan fundamentalmente en estrategias basadas en volatilidad y se van ajustando progresivamente a la situación real del mercado con resultados totales netos (en $\text{\$}$) para la cartera óptima final a vencimiento en el rango [344.040'3, 460.257'4] para expectativas de volatilidad baja, [-890.345'3, -301.530'6] para expectativas medias y [70.988'6, 5.545.590'8] para expectativas altas.

El trabajo realizado proporciona un punto de partida firme para líneas investigación futura, citemos, por ejemplo: la incorporación de las expectativas de los inversores a otros modelos o procedimientos numéri-

cos de valoración de opciones y el estudio comparado de los resultados obtenidos, la adaptación del programa de optimización dinámica para incluir la posibilidad de ejercicio anticipado de opciones americanas, o la extensión de los resultados distribucionales a nivel multivariante y adaptar el programa de optimización dinámica para incluir opciones sobre más de un subyacente entre otras.

Apéndice A1

Deduciremos en este Apéndice, apoyándonos en los resultados inferenciales Bayesianos revisados al final del mismo, las distribuciones predictivas [4], [13], [15] y [16], la distribución final [10] y las distribuciones final y predictiva de las notas 8 y 9 respectivamente.

- a) Distribución predictiva [4]. Distribución predictiva del logaritmo del precio del subyacente a vencimiento asumiendo el modelo definido por [2]-[3] y dada la información del mercado al contado hasta t .

A partir de [2] para intervalos temporales unitarios se obtiene la distribución de $R_1, \dots, R_t | S_0, \sigma^2$, y aplicando el Resultado 1 sobre esta distribución y la distribución inicial [3] se obtiene la distribución de $\sigma^2 | S_0, R_1, \dots, R_t$:

$$\sigma^2 | S_0, R_1, \dots, R_t \sim GIG(\lambda_t, \chi_t, \psi_t) \quad [A1.1]$$

Para finalizar, a partir de [2] se obtiene la distribución de $\log S_T / (T - t)^{1/2} | S_0, R_1, \dots, R_t, \sigma^2$; y a partir de ésta y [A1.1] se obtiene, aplicando el Resultado 2(a), la distribución predictiva de $\log S_T / (T - t)^{1/2} | S_0, R_1, \dots, R_t$ (ecuación [4]).

- b) Distribución final nota 8. Distribución final de σ^2 asumiendo el modelo de valoración de opciones en un contexto de neutralidad al riesgo (ecuaciones [2]-[3] y [6]-[7]), y dadas la información del mercado al contado hasta t' y del mercado de derivados en el intervalo $[t, t']$ y las estimaciones de los precios teóricos de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$.

A partir de [2] para intervalos temporales unitarios y de [6] se obtienen las distribuciones de $R_1, \dots, R_{t'} | S_0, \sigma^2$ y de $\{f(C_{ij\tau})\}_{i,j,t \leq \tau < t'} | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \beta_0, \beta_1, \sigma^2$ respectivamente. Finalmente, a partir de éstas y

la distribución inicial $p(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) \propto p(\sigma^2) \propto 1/\sigma^2$ se obtiene aplicando el teorema de Bayes que:

$$\begin{aligned} & p(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}) \\ & \propto p(R_1, \dots, R_{t'}, \{f(C_{ij\tau})\}_{i,j,t \leq \tau < t'} | S_0, \beta_0, \beta_1, \sigma^2) \times p(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) \\ & \propto p(\{f(C_{ij\tau})\}_{i,j,t \leq \tau < t'} | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \beta_0, \beta_1, \sigma^2) \\ & \quad \times p(R_1, \dots, R_{t'} | S_0, \sigma^2) \times p(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) \\ & \propto (\sigma^2)^{\lambda_{t'}-1} \exp \left\{ -1/2\sigma^2 \left(\beta - \hat{\beta} \right)^t B^{-1} \left(\beta - \hat{\beta} \right) \right\} \\ & \quad \times (\sigma^2)^{\lambda_{t'}-1} \exp \left\{ -0.5 \left(\chi_{t'} / \sigma^2 + \psi_{t'} \sigma^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

con $\beta = (\beta_0, \beta_1)^t$, de donde obtenemos las distribuciones finales de $\beta_0, \beta_1, |S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2$:

$$\beta_0, \beta_1, |S_0, S_1, \dots, S_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2 \sim N \left(\hat{\beta}, B\sigma^2 \right) \quad [A1.2]$$

y de $\sigma^2 | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ (ecuación nota 8).

- c) Distribución final [10]. Distribución final de β_0, β_1 y σ^2 asumiendo el modelo de valoración de opciones según las expectativas del inversor (ecuaciones [2]-[9] sustituyendo r por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$ y [6]-[7]), y dadas la información del mercado al contado hasta t' y del mercado de derivados en el intervalo $[t, t')$ y las estimaciones de los precios teóricos de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t')$.

A partir de [2] para intervalos temporales unitarios, sustituyendo r por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$, se obtiene la distribución de $R_1, \dots, R_{t'} | S_0, \eta, \sigma^2$; y a partir de ésta y la distribución inicial de $\eta | \sigma^2$ se obtiene, aplicando el Resultado 3(a), la distribución de $R_1, \dots, R_{t'} | S_0, \sigma^2$. A continuación, a partir de la distribución de $R_1, \dots, R_{t'} | S_0, \sigma^2$ y de $\{f(C_{ij\tau})\}_{i,j,t \leq \tau < t'} | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \beta_0, \beta_1, \sigma^2$ se obtiene la distribución conjunta de $R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'} | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \beta_0, \beta_1, \sigma^2$. Finalmente, a partir de ésta última y la distribución inicial $p(\beta_0, \beta_1 | \sigma^2) \propto 1$ se obtienen, aplicando el Resultado 3 y haciendo $V_2^{-1} \rightarrow 0$, las distribuciones de $R_1, \dots, R_{t'}, \{f(C_{ij\tau})\}_{i,j,t \leq \tau < t'} | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \sigma^2$ y de $\beta_0, \beta_1, |S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2$ (ecuación [10]); y a partir de la distribución de $R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'} | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \sigma^2$ y la distribución inicial $\sigma^2 \sim Ga^{-1}(a_0, b_0)$, aplicando el Resultado 4(b), la distribución de $\sigma^2 | S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ (ecuación [10]).

- d) Distribución predictiva [13]. Distribución predictiva de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})$ asumiendo el modelo de valoración de opciones en un contexto de neutralidad al riesgo (ecuaciones [2]-[3] y [6]-[7]) y la ecuación [12], y dadas la información del mercado al contado hasta t' y del mercado de derivados en el intervalo $[t, t')$, las estimaciones de los precios teóricos de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t')$ y el precio teórico de $q_{ij t'+k}^{(t')}$ dados los precios de subyacente en el intervalo $[0, t')$.

A partir de [12] se obtiene la distribución de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \beta_0, \beta_1, \sigma^2$, y a partir de ésta y de la distribución final de $\beta_0, \beta_1, |S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2$ para este modelo (ecuación [A1.2]) se obtiene aplicando el Resultado 3(a) la distribución de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2$. Finalmente, a partir de la distribución de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})/\sqrt{d_{t'}^j}|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2$ y de $\sigma^2|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ para este modelo (nota 8) se obtiene, aplicando el Resultado 2(a) la distribución predictiva de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})/\sqrt{d_{t'}^j}|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ (ecuación [13]).

- e) Distribución predictiva nota 9. Distribución predictiva de $\log S_{t'+k} (k > 0)$ asumiendo el modelo de valoración de opciones en un contexto de neutralidad al riesgo (ecuaciones [2]-[3] y [6]-[7]), y dadas la información del mercado al contado hasta t' y del mercado de derivados en el intervalo $[t, t')$ y las estimaciones de los precios teóricos de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t')$.

A partir de [2] se obtiene la distribución de $\log S_{t'+k}/\sqrt{k}|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \sigma^2$; y a partir de ésta y la distribución final de $\sigma^2|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ para este modelo (nota 8) se obtiene, aplicando el Resultado 2(a), la distribución predictiva de $\log S_{t'+k}/\sqrt{k}|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij\tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ (ecuación nota 9).

- f) Distribución predictiva [15]. Distribución predictiva de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})$ asumiendo el modelo de valoración de opciones según las expectativas del inversor (ecuaciones [2]-[9] sustituyendo r por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$ y [6]-[7]) y ecuación [12], y dadas la información del mercado al contado hasta t' y del mercado de derivados en el intervalo $[t, t')$, las estimaciones de los precios teóricos

de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$ y el precio teórico de $q_{ij t'+k}^{(t')}$ dados los precios de subyacente en el intervalo $[0, t']$.

A partir de [12] se obtiene la distribución de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})|S_0, R_1, \dots, R_{t'}$, $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$, y a partir de ésta y de la distribución final de $\beta_0, \beta_1, |S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij \tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2$ para este modelo (ecuación [10]) se obtiene aplicando el Resultado 3(a) la distribución de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij \tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2$. Finalmente, a partir de la distribución de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})/\sqrt{d_{t'}^j}|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij \tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}, \sigma^2$ y de $\sigma^2|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij \tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ para este modelo (ecuación [10]) se obtiene, aplicando el Resultado 4(a) la distribución predictiva de $f(C_{ij t'+k}^{(t')})/\sqrt{d_{t'}^j}|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij \tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ (ecuación [15]).

- g) Distribución predictiva [16]. Distribución predictiva de $\log S_T$ asumiendo el modelo de valoración de opciones según las expectativas del inversor (ecuaciones [2]-[9] sustituyendo r por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$ y [6]-[7]), y dadas la información del mercado al contado hasta t' y del mercado de derivados en el intervalo $[t, t']$ y las estimaciones de los precios teóricos de las opciones de compra negociadas en el intervalo $[t, t']$.

A partir de [2] para intervalos temporales unitarios, sustituyendo r por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$, se obtiene la distribución de $R_1, \dots, R_{t'}|S_0, \eta, \sigma^2$; y a partir de ésta y la distribución inicial de $\eta|\sigma^2$ se obtiene, aplicando el Resultado 3(b), la distribución de $\eta|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \sigma^2$. Por otra parte, a partir de [2] sustituyendo r por μ y haciendo $\eta = \mu - \sigma^2/2$ se obtiene la distribución de $\log S_T|S_0, R_1, \dots, R_t, \eta, \sigma^2$; y a partir de esta distribución y la distribución de $\eta|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \sigma^2$ se obtiene, aplicando el Resultado 3(a) la distribución de $\log S_T|S_0, R_1, \dots, R_t, \sigma^2$. Finalmente, a partir de esta última distribución y la distribución de $\sigma^2|S_0, R_1, \dots, R_{t'}, \{C_{ij \tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ para este modelo (ecuación [10]) se obtiene, aplicando el Resultado 4(a) la distribución predictiva de $\log S_T|S_0, R_1, \dots, R_t, \{C_{ij \tau}\}_{i,j,t \leq \tau < t'}$ (ecuación [16]).

A1.1 Resultados inferenciales Bayesianos:

RESULTADO 1.- Sean $Y_i|\sigma^2$ variables independientes e igualmente distribuidas: $Y_i|\sigma^2 \sim N(\mu + \beta\sigma^2, \sigma^2)$ $i = 1, \dots, n$, y la distribución inicial $p(\sigma^2) \propto 1/\sigma^2$, entonces la distribución final de $\sigma^2|y_1, \dots, y_n$ es:

$$\sigma^2|y_1, \dots, y_n \sim GIG(\lambda, \chi, \psi)$$

con $\lambda = -n/2$, $\chi = (n-1)s^2 + n(\bar{y} - \mu)$, $\psi = n\beta^2$, donde \bar{y} , s^2 , son la media y varianza muestral estándar de $\{y_i\}$ respectivamente.

DEMOSTRACIÓN: El resultado se deriva a partir de la distribución conjunta de $Y_1, \dots, Y_n|\sigma^2$ y la distribución inicial de σ^2 aplicando el teorema de Bayes.

RESULTADO 2.- Sean $Y_i|\sigma^2$ variables independientes e igualmente distribuidas: $Y_i|\sigma^2 \sim N(\mu + \beta\sigma^2, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$, y la distribución inicial $\sigma^2 \sim GIG(\lambda, \chi, \psi)$, entonces:

a) la distribución marginal de Y_i es: $Y_i \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, $i = 1, \dots, n$

b) la distribución final de $\sigma^2|y_1, \dots, y_n$ es: $\sigma^2|y_1, \dots, y_n \sim GIG(\lambda_1, \chi_1, \psi_1)$

con $\delta = \sqrt{\chi}$, $\alpha = \sqrt{\psi + \beta^2}$, $\lambda_1 = \lambda - n/2$, $\chi_1 = \chi + (n-1)s^2 + n(\bar{y} - \mu)$, $\psi_1 = \psi + n\beta^2$, donde \bar{y} , s^2 son la media y varianza muestral estándar de $\{y_i\}$ respectivamente.

DEMOSTRACIÓN: Los resultados a) y b) se obtienen de las distribuciones de $Y_i|\sigma^2$ y σ^2 de aplicando el teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes respectivamente.

RESULTADO 3 (véase Font (1995), Apéndice B, Lema B.8).- Sean $Y|\theta_1 \sim N_{p_0}(A_1\theta_1, V_1)$ y la distribución inicial $\theta_1 \sim N_{p_1}(A_2\theta_2, V_2)$, entonces:

a) la distribución marginal de Y es: $Y|\theta_2 \sim N_{p_0}(A_1A_2\theta_2, V_1 + A_1V_2A_1^t)$

b) la distribución final de $\theta_1|y$ es: $\theta_1|y \sim N_{p_1}(Dd, D)$ con $D^{-1} = A_1^tV_1^{-1}A_1 + V_2^{-1}$, $d = A_1^tV_1^{-1}y + V_2^{-1}A_2\theta_2$, donde θ_2 es un p_2 -vector conocido, A_1, A_2 matrices $p_0 \times p_1$ y $p_1 \times p_2$ conocidas y V_1, V_2 matrices de dimensiones $p_0 \times p_0$ y $p_1 \times p_1$ definidas positivas conocidas.

RESULTADO 4 (véase Font (1995), Apéndice B, Lema B.9).- Sean $Y|\sigma^2 \sim N_{p_0}(\theta_1, W_1\sigma^2)$ y la distribución inicial $\sigma^2 \sim Ga^{-1}(a_0, b_0)$, entonces:

a) la distribución marginal de Y es: $Y \sim St_{p_0}(\theta_1, b_0a_0^{-1}W_1, 2a_0)$

b) la distribución final de $\sigma^2|y$ es: $\sigma^2|y \sim Ga^{-1}(a_1, b_1)$ con $a_1 = a_0 + p_0/2$, $b_1 = b_0 + 0.5(y - \theta_1)^tW_1^{-1}(y - \theta_1)$, donde θ_1 es un p_0 -vector

conocido, W_1 , una matriz $p_0 \times p_0$ definida positiva, y a_0 y b_0 escalares positivos.

Referencias

- Atkinson, A. C. (1982): "The simulation of generalized inverse Gaussian and hyperbolic random variables", *SIAM Journal of Scientific & Statistical Computing* 3, pp. 502-515.
- Balbas, A., I. R. Longarela y A. Pardo (2000): "Integration and arbitrage in the Spanish financial markets: An empirical approach", *Journal of Futures Markets* 20, pp. 321-344.
- Barddorff-Nielsen, O. E. (1977): "Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size", *Proceedings of the Royal Society (London A)* 353, pp. 401-419.
- Black, F. y M. Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy* 81, pp. 637-659.
- Board, J., C. Sutcliffe y E. Patrinos (2000): "The performance of covered calls", *The European Journal of Finance* 6, pp. 1-17.
- Bookstaber, R. y R. Clarke (1985): "Problems in evaluating the performance of portfolios with options", *Financial Analysts Journal* January-February, pp. 48-62.
- Bullock, D. W. y D. J. Hayes (1992): "Speculation and hedging in commodity options: A modification of Wolf's Portfolio Model", *Journal of Economics and Business* 44, pp.201-221.
- Eraker, B. (2004): "Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices", *Journal of Finance* 59, pp. 1367-1403.
- Engle, R. y C. Mustafa (1992): "Implied ARCH Models from option prices", *Journal of Econometrics* 52, pp. 289-311.
- Font, B. (1995), *Análisis Bayesiano de muestras no aleatorias en poblaciones finitas* Tesis Doctoral, Universidad de Valencia.
- Font, B. (2004): "Estrategias especulativas óptimas con opciones", *Revista Española de Financiación y Contabilidad* 33, pp. 161-203.
- Forbes, C. S., G. M. Martin y J. Wright (2007): "Inference for a class of stochastic volatility models using option and spot prices: Application of a bivariate Kalman filter", *Econometric Reviews* 26, pp. 387-418.
- Greenberg, E. (2008), *Introduction to Bayesian Econometrics* Cambridge University Press.
- Hull, J. C. (2006), *Options, Futures, and other Derivative* 6th edition, Prentice Hall, New Jersey.
- Jacquier, E. y R. Jarrow (2000): "Bayesian analysis of contingent claim model error", *Journal of Econometrics* 94, pp. 145-18.

- Korn, R., y P. Wilmott (1998): "A general framework for hedging and speculating with options", *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 1, pp. 507-522.
- Ladd, G. W. y S. D. Hanson (1991): "Price-risk management with options: Optimal market positions and institutional value", *The Journal of Futures Markets* 11, pp. 737-750.
- Marron, J. S. y D. Nolan (1989): "Canonical Kernels for Density Estimation", *Statistics and Probability Letters* 7, pp. 191-195.
- Martin, G. M., C. S. Forbes y V. L. Martin (2005): "Implicit Bayesian inference using option prices", *Journal of Time Series Analysis* 26, pp. 437-462.
- Morard, B., y A. Naciri (1990): "Options and investment strategies", *The Journal of Futures Markets* 10, pp. 505-517.
- Rendleman, R. J. (1981): "Optimal long-run option investment strategies", *Financial Management* 10, pp. 61-76.
- Silverman, B. W. (1986), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis* Chapman & Hall, London.
- Wolf, A. (1987): "Optimal hedging with futures options", *Journal of Economics and Business* 39, pp. 141-158.
- Zellner, A. (1990): "Bayesian inference", en Eatwell, J., M. Milgate y P. Newman (eds.), *The New Palgrave Time Series and Statistics*, WW Norton & Company, pp. 36-61.

Resumen

This paper focus on trading in option markets for investment purposes and it develops a general Bayesian framework for evaluating European options where we can merge the investor's subjective beliefs about the changes in trend and volatility in the price movements of the underlying asset with the observed spot and option prices. In addition, it is proposed a dynamic integer-programming model, based on the previous Bayesian estimates, for obtaining the optimum number of options to buy/sell in order to maximize the estimated profitability of the portfolio. The methodology is applied on the Spanish Financial Futures and Options Exchange.

Keywords: Bayesian option pricing; European options; portfolio management.